

"APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
A UM PROBLEMA DE ELASTICIDADE PLANA"

GILBERTO AQUINO BENETTI

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:

Fernando P. Lameira

Luiz Fernando V. Lages

João Benício

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
NOVEMBRO DE 1971

à minha esposa

### AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Sydney M.G. dos Santos, pela orientação dada a este trabalho.

Ao Prof. Fernando L.L. Carneiro pelo estímulo e atenções dispensados ao autor.

Ao Prof. Alcebíades Vasconcellos Filho, por seus ensinamentos e atenções, principalmente pela utilização de seu programa em Elementos Finitos.

À UFSM e CAPES, pelo auxílio financeiro recebido.

À Direção e Departamento de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da UFSM, pelo apoio na realização deste trabalho.

Ao Prof. Sergio Vargas de Souza, pelo auxílio na redação final deste trabalho.

Ao futuro engenheiro Francisco Amaral Wendt, pelo extraordinário e imprescindível suporte de programação, sem o qual este trabalho teria sido bem menos geral.

Aos funcionários do Núcleo de Processamento de Dados, por sua solicitude, especialmente ao assessor de direção.

À Jane Carpes Athayde, pelos desenhos e gráficos.

Ao Robson P. Gonçalves, pela datilografia deste trabalho.

### SINOPSE

Estuda-se um problema do estado plano de tensões, mais especificamente o de placas de espessura delgada de forma poligonal com carregamento no seu próprio plano.

Inicialmente estabelecem-se as fórmulas - necessárias para resolver o problema, através de Diferenças Finitas em coordenadas triangulares e em coordenadas oblíquas ; comparando-se o resultado com os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos<sup>9</sup>, através do programa MEFI-1.

Como casos particulares de aplicação da teoria, são estudadas algumas placas de contorno poligonal com carregamento uniformemente distribuído ao longo dos bordos superior e inferior.

Para a solução do problema desenvolveu-se um programa que permite a análise de placas de espessura delgada ou chapas, no estado plano de tensões, válido para os sistemas cartesiano, oblíquo ou triangular. Este programa é descrito com algum detalhe e, para sua compreensão, inclui-se um fluxograma simplificado no apêndice.

## SINOPSIS

It is studied a problem of plane stresses, that is, the one of small thickness polygon form plates with loading in its own plane.

Initially, the essential formulas to resolve the problem are set up through finite differences in triangular coordinates and skew coordinates comparing the results got with the ones obtained by the Finite Element Method using the MEFI-1 program.

As particular cases of the theory application, some polygon shape plates with loading uniformly distributed through the superior and inferior edges are studied.

In order to give a solution to the question it was developed a self-acting program which allows an analysis of plane stresses small thickness plates or slabs, valid for the Cartesian, skew or triangular systems. This program is outlined in some detail, and to help its understanding it was inserted a simplified flowchart in the appendix.

## ÍNDICE

NOTAÇÕES .....	1
INTRODUÇÃO .....	4
CAPÍTULO I - ESTADOS PLANOS DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES	
1.1 - Considerações Gerais .....	9
1.2 - Expressões Fundamentais .....	9
1.3 - Função das Tensões .....	14
1.4 - Condições de Contorno .....	16
CAPÍTULO II - SOLUÇÃO APROXIMADA - MÉTODO DAS DIFE - RENÇAS FINITAS	
2.1 - Condições Gerais .....	22
2.2 - Escolha do tipo de malha .....	23
2.3 - Laplaciano em coordenadas triangulares .....	24
2.4 - Os operadores de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem, em di ferenças finitas .....	29
2.5 - Molécula Geradora das Equações .....	32
2.6 - Diferenças Finitas em coordenadas oblíquas ...	35
CAPÍTULO III - ESTUDO DAS TENSÕES	
3.1 - Condições Gerais .....	38
3.2 - A expressão das tensões em diferenças finitas.	39
3.3 - Tensões principais .....	43
CAPÍTULO IV - APLICAÇÕES	
4.1 - Estruturas analisadas .....	45
4.2 - Molécula Geradora Específica .....	46

4.3 - Pontos do Contorno .....	48
4.4 - Pontos Externos .....	52
4.5 - Placas 1 e 2 .....	55
4.6 - Placa 1A .....	58
4.7 - Placa 1B .....	62
4.8 - Placa 2A .....	63
CAPÍTULO V - ELEMENTOS FINITOS	
5.1 - Condições Gerais .....	82
Placa 1B .....	85
Placa 2A .....	86
Placa 1 .....	88
Placa 2 .....	95
Placa 1C .....	102
Placa 2B .....	103
DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....	104
CONCLUSÃO .....	109
GRÁFICOS .....	114
APÊNDICE 1 .....	121
PROGRAMA GEMOL .....	124
PROGRAMA GERSI .....	128
PROGRAMA RSIMQ .....	134
PROGRAMA TEDIF .....	137
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	140

NOTAÇÕES

$e_{xx}, e_{yy}$	deformações lineares, respectivamente segundo $Ox$ e $Oy$
$e_{xy}$	deformação angular
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	tensões em um ponto da placa
$\sigma_n, \tau_n$	tensão normal e tangencial em uma seção, cuja normal forma um ângulo $(n_x)$ com $Ox$
$\sigma_1, \sigma_2$	valor de $\sigma_n$ , máximo e mínimo
$X, Y$	fôrças por unidade de massa
$\bar{X}, \bar{Y}$	fôrças por unidade de contorno, segundo $Ox$ e $Oy$
$F_x, F_y$	componentes, segundo $Ox$ e $Oy$ , das fôrças de contorno, computadas desde uma origem até um ponto "s" do contorno
$F_N, F_T$	componentes, segundo a normal e a tangente das fôrças de contorno, computadas desde uma origem até um ponto "s" do contorno (os eixos, normal e tangente se referem ao ponto "s")
$E$	módulo de elasticidade do material da placa
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\rho$	densidade do corpo, ou massa por unidade de volume



$U$ e $V$	projeções do deslocamento segundo $Ox$ e $Oy$
$z$	função das tensões ou função de Airy
$\alpha, \beta$	ângulos de $Ov$ com $Ou$ e de $Ow$ com $Ou$
$\nabla^2$	Laplaciano
$\nabla^4$	bi-Laplaciano
$\Delta, \Delta^2, \Delta^4$	diferença central de primeira ordem, segunda ordem e quarta ordem
$K_j$	coeficiente da Molécula Geradora ( $j=1,2,\dots$ )
$n_x$	ângulo formado pela normal da seção considerada e o eixo $Ox$
$\theta$	valor de $(n_x)$ para as seções principais, onde $\sigma_n$ é máximo
$\delta$	espessura da placa
$z_s$	função $z$ no contorno
$H$	altura total da placa
$a$	dimensão da placa sobre o eixo de simetria horizontal
$b$	dimensão dos bordos inferior e superior
$h$	lado do elemento da malha triangular ou base do elemento da malha oblíqua
$n_E$	ponto comum ao bordo superior e ao bordo lateral inclinado
$n_L$	ponto do bordo lateral sobre o eixo de simetria horizontal
$z_i$	quando $i$ for algarismo arábico se refere

a pontos internos

quando  $i$  for algarismo romano se refere a pontos do contôrno

quando  $i$  for literal se refere a pontos externos ou fictícios

$P_0$  carga uniformemente distribuída ao longo - do bordo superior e inferior, por unidade de espessura

B base do elemento da malha triaúngular

K fator que relaciona o lado e a base do elemento da malha oblíqua

\_\_\_\_\_ bordo livre

----- eixo de simetria

\_\_\_\_\_ malha

## INTRODUÇÃO

O problema do estado plano de tensões, no caso de placas de espessura delgada com carregamento no seu próprio plano, envolve a solução de uma equação diferencial parcial de quarta ordem, que nem sempre tem solução exata.

Pode-se atestar, baseado em afirmativas categóricas, que a solução formal do problema só é possível em casos isolados.

Como decorrência natural da afirmativa acima ter-se-á que lançar mão de métodos numéricos, que levarão à soluções aproximadas.

Os métodos numéricos acarretam, por sua natureza, um grande esforço de cálculo e, em consequência, uma grande probabilidade de erro.

A utilização do computador se torna imprescindível, mormente se desejarmos ter soluções próximas da real. É preciso que se diga, que nem sempre é fácil programar determinado método e, muitas vezes, impossível automatizá-lo totalmente.

As novas concepções arquitetônicas exigem do engenheiro soluções não usuais, bem como uma crescente necessidade de dominar razoavelmente as técnicas de computação.

Um dos métodos numéricos mais utilizados na solução de problemas de elasticidade é o das Diferenças Fi -

nitas. Mesmo assim, apresenta êste método certas interrogações quando aplicado a alguns problemas ainda pouco estudados.

A falta de pesquisa neste campo, talvez se explique pelo grande volume de cálculo exigido e pelo surgimento de novos métodos, totalmente programados através de computadores<sup>9</sup>.

Como se não bastassem as dificuldades já enumeradas, surgem ainda outras tais como: condições de contorno ; necessidade de valores fictícios, externos à placa; a inexistência de um elemento de malha que se adapte a qualquer problema; grande complexidade quando se utiliza malhas irregulares e que nem sempre o sistema de equações lineares obtido é bem condicionado.

O estudo de um tipo de problema do estado plano, do qual resultam as interrogações já mencionadas e a tentativa de levantá-las, bem como a comparação entre o Método das Diferenças Finitas e o dos Elementos Finitos, deram origem a êste trabalho.

A orientação seguida para desenvolver o trabalho foi a seguinte:

- a) Fundamentos teóricos.
- b) Aplicação do Método de Diferenças Finitas e de Elementos Finitos a um mesmo problema , apenas variando a forma geométrica.
- c) Um programa tão automático quanto possível,

limitado pelas condições do problema e pela experiência de quem programou.

Os fundamentos teóricos são sobejamente desenvolvidos na literatura conhecida <sup>1,2,3,4,5</sup> e expostos no capítulo I.

A contribuição pessoal se evidencia nos capítulos II e III, embora não esteja com isto reinvidicando nenhum ineditismo.

Nestes capítulos se define o tipo de malha adequado ao problema. Em função disto estuda-se a parte matemática correspondente, até se chegar a Molécula Geradora das Equações. Como complemento se determina o cálculo das tensões e a respectiva molécula.

No capítulo IV, onde se estuda o problema específico, são determinadas: as Moléculas Geradoras Específicas; os pontos do Contorno; os Pontos Externos e as tensões específicas.

Examina-se, por Diferenças Finitas em coordenadas triangulares e coordenadas oblíquas, 2 grupos de placas de espessura delgada, que diferem apenas na configuração do contorno.

O primeiro grupo é composto de três placas denominadas P-1A, P-1B e P-1C, as duas primeiras representam a mesma placa, diferindo apenas na abertura da malha. A terceira placa, embora apresente o mesmo tipo de contorno, possui

um ângulo de inclinação dos lados, diferente das duas iniciais. Com as duas primeiras placas, uma com malha mais refinada do que a outra, busca-se uma tentativa de mostrar a convergência dos valores em diferenças finitas. A terceira placa detectaria uma possível influência da variação do ângulo de inclinação dos lados, no valor da função  $z$ .

O segundo grupo é constituído de 2 placas, ambas com a mesma malha, variando apenas o ângulo de inclinação dos lados.

No capítulo V, algumas destas placas são resolvidas pelo Método dos Elementos Finitos, através do programa MEFI-1 desenvolvido na tese de doutoramento do prof. Alcebíades Vasconcellos Filho<sup>9</sup>. A resolução por Elementos Finitos foi efetuada com a única finalidade de se comparar a precisão dos resultados obtidos por diferenças finitas, desde que se conhece a potencialidade e a grande vantagem da automatização do Método dos Elementos Finitos.

Ainda neste capítulo, procura-se discutir os resultados obtidos, comparando-se os dois métodos, o das Diferenças Finitas e o dos Elementos Finitos. Da discussão pretende-se constatar diferenças ou mesmo discrepância entre os métodos, buscando sempre que possível, as suas causas. Esta tentativa de explicar as diferenças encontradas permitirá chegar a algumas conclusões sobre o Método das Diferenças Finitas, aplicado a problemas do tipo estudado neste trabalho. As tabe-

las e gráficos permitem uma mais detalhada e criteriosa observação dos resultados e das diferenças entre os métodos.

Finalmente no apêndice 1, são explicados, de uma maneira sucinta, os programas desenvolvidos. Às limitações dos conhecimentos de programação deve-se somar o pequeno porte do computador disponível (1130-8k) e a inadequação do problema para uma automatização total. A principal finalidade dos programas desenvolvidos foi a de eliminar, o mais possível, a intervenção humana em operações de cálculo, diminuindo com isto a margem de erro numérico.

A assimilação a uma treliça plana foi tentada durante o desenvolvimento do trabalho, quando o autor buscava solucionar o problema.

Os resultados obtidos foram satisfatórios, quando comparados aos dos Elementos Finitos e os das Diferenças Finitas.

Apenas foi constatada a viabilidade do método, embora se saiba que o mesmo é passível de aprimoramento.

Não será incluído no presente trabalho, para evitar que o mesmo se torne muito extenso e, principalmente, por fugir demasiado às diretrizes iniciais.

## CAPÍTULO I - ESTADOS PLANOS DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

### 1.1 - Considerações gerais

O objetivo dêste capítulo será o de relembrar alguns conhecimentos básicos da teoria da elasticidade.

Procura-se, na redação, seguir a sequência e forma - expositiva de Filonenko<sup>1</sup> e Girkmann<sup>2</sup>. Houve, com isto, a tentativa de fundir dois textos num só.

Como o problema a resolver é do estado plano de tensões, não se estuda o estado plano de deformações detalhadamente.

O próprio estado plano de tensões será estudado até onde seja necessário e indispensável à compreensão do problema particular do autor.

### 1.2 - Expressões fundamentais

Como o próprio título sugere, se dará atenção aos - problemas que ocorram no plano, digamos  $O_{xy}$ . Isto implicará em que os deslocamentos segundo  $Oz$  sejam nulos e que os outros - dois, segundo  $O_x$  e  $O_y$ , sejam independentes da coordenada  $z$ .

É muito difícil conseguir tal situação na prática , mas ela se mostra muito parecida em vários problemas<sup>1</sup>.

As equações fundamentais da elasticidade, isto é, as de equilíbrio e de compatibilidade, são consideradas assunto - conhecido e, como tal, serão simplesmente transcritas.



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X\rho = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y\rho = 0$$

$$e_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad e_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad e_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (1.2)$$

Considerando-se as condições de contorno tem-se:

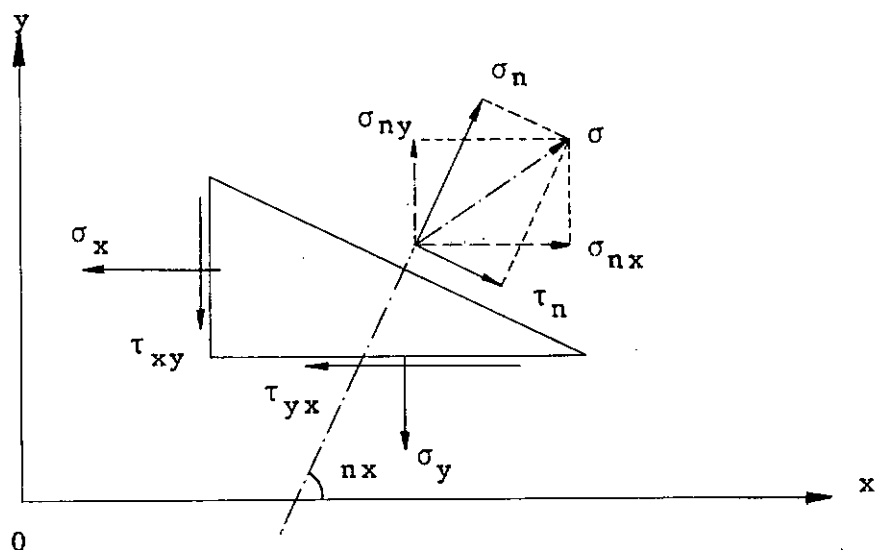


Figura 1.1

$$\sigma_{nx} = \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \sen(nx) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ny} = \tau_{yx} \cos(nx) + \sigma_y \sen(nx)$$

Das equações (1.2) será fácil concluir-se que:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.4)$$

e da lei de Hooke deduz-se que:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{1}{E} ( \sigma_x - \nu \sigma_y ) \\
 e_{yy} &= \frac{1}{E} ( \sigma_y - \nu \sigma_x ) \\
 e_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Ao se assumir para os deslocamentos a expressão funcional abaixo

$$U = f_1(x,y) \quad ; \quad V = f_2(x,y) \tag{1.6}$$

As equações (1.2) resultam

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= f_1(x,y) \quad ; \quad e_{yy} = f_2(x,y) \\
 e_{xy} &= f_3(x,y)
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

que são as equações do estado plano de deformações.

As equações ( 1.5 ) são derivadas como se segue:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \frac{\nu \partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right] \\
 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\nu \partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right] \\
 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Derivando as expressões (1.1) e colocando-as na forma abaixo, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y}$$

Somando-se as expressões acima, membro a membro e considerando as forças de massa constantes, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) \quad (1.9)$$

De posse de (1.9) pode-se expressar (1.8) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right] \\ - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1+\nu}{E} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Se as equações (1.4) receberem os valores calcula

dos em (1.10) conclui-se que:

$$\frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} \right] = 0$$

ou ainda que:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (1.11)$$

esta equação é também chamada de condição Maurice-Lévy.

Como o problema a ser estudado envolve exclusivamente o estado plano de tensões, o mesmo pode ser resolvido com as seguintes equações:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.1)'$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + P = 0$$

onde  $X = 0$  e  $Y = P$

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \sin(nx) \\ \sigma_{ny} &= \tau_{yx} \cos(nx) + \sigma_y \sin(nx) \end{aligned} \quad (1.3)$$

e finalmente:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (1.11)$$

Em nenhuma destas três equações aparecem constantes elásticas, isto quer dizer que o estado de tensões independe do material do corpo.

Esta conclusão é válida para corpos limitados por regiões simplesmente conectas<sup>1</sup>, como os que este traba

lho se propõe examinar.

### 1.3 Função das Tensões

Estudando a solução do problema, G.B.Airy indicou a possibilidade de se simplificar a solução do problema. Esta simplificação é baseada no fato de que é relativamente fácil achar a solução geral do sistema de equações.(1.1)'

O sistema é não homogêneo, no entanto, a solução geral representa a soma da solução geral do sistema homogêneo e da solução particular deste mesmo sistema. O sistema homogêneo se escreverá como:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

A solução particular é imediata, assumindo-se em (1.1)' os valores abaixo:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \text{ então: } \tau_{yx} = -Px$$

$$\text{ou ainda: } \sigma_x = \tau_{xy} = 0, \text{ então: } \sigma_y = -Py$$

A solução geral é possível através da introdução de uma função arbitrária  $z(x,y)$ , função das variáveis independentes  $xy$  e que satisfaça as seguintes condições:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (1.13)$$

Substituindo-se (1.13) em (1.12) vê-se que  $z(x,y)$  é de fato solução geral do sistema, admitindo-se que as derivadas parciais até quarta ordem inclusive existam e sejam contínuas. Esta função é chamada FUNÇÃO DAS TENSÕES ou FUNÇÃO DE AIRY.<sup>1</sup>

A solução geral poderia ser obtida facilmente, escolhendo-se duas funções arbitrárias  $\psi(x,y)$  e  $\chi(x,y)$ , onde:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} ; & \tau_{xy} &= - \frac{\partial \psi}{\partial x} ; \\ \tau_{yx} &= \frac{\partial \chi}{\partial y} ; & \sigma_y &= - \frac{\partial \chi}{\partial x}\end{aligned}\quad (1.14)$$

Estas funções satisfazem as equações (1.12), somente se:

$$- \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0 \quad \text{daí:} \quad (1.15)$$

$$\psi = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{e} \quad \chi = - \frac{\partial z}{\partial x}$$

As funções acima satisfazem as condições de Cauchy-Riemann e são ditas analíticas<sup>16</sup>.

Das expressões (1.14) e (1.15) retiram-se os valores de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} ; & \tau_{xy} &= - \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \tau_{yx} &= \frac{\partial \chi}{\partial y} = - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} ; & \sigma_y &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Comparando-se as expressões anteriores com (1.13) vê-se que são idênticas.

A expressão de (1.11) resulta em:

$$[\sigma_x + \sigma_y] = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \nabla^2 z$$

$$\text{então: } \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2 \nabla^2 z = \nabla^4 z = 0 \quad (1.16)$$

$$\nabla^4 z = \left[ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right] = 0 \quad (1.17)$$

A solução do problema do estado plano, em termos de tensões, se reduz a integração da equação diferencial parcial (1.17). Uma vez determinada  $z(x,y)$ , pode-se achar as tensões por (1.13).

As condições de contorno, correspondentes ao problema específico, devem ser adicionadas à equação para a sua solução.

Como o problema a ser tratado neste trabalho é o de placas de espessura delgada com carregamento no seu próprio plano, tem-se que estudar as condições de contorno para este tipo de problema.

#### 1.4 - Condições de contorno

A investigação analítica do estado de tensões consiste na determinação de uma função  $z(x,y)$ , que satisfaça a equação diferencial (1.17) e as condições prescritas pelas forças de contorno  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ . Para expressar estas forças de uma

forma simples, para uma configuração arbitrária do contorno, se considera o equilíbrio de forças em um elemento do próprio contorno.

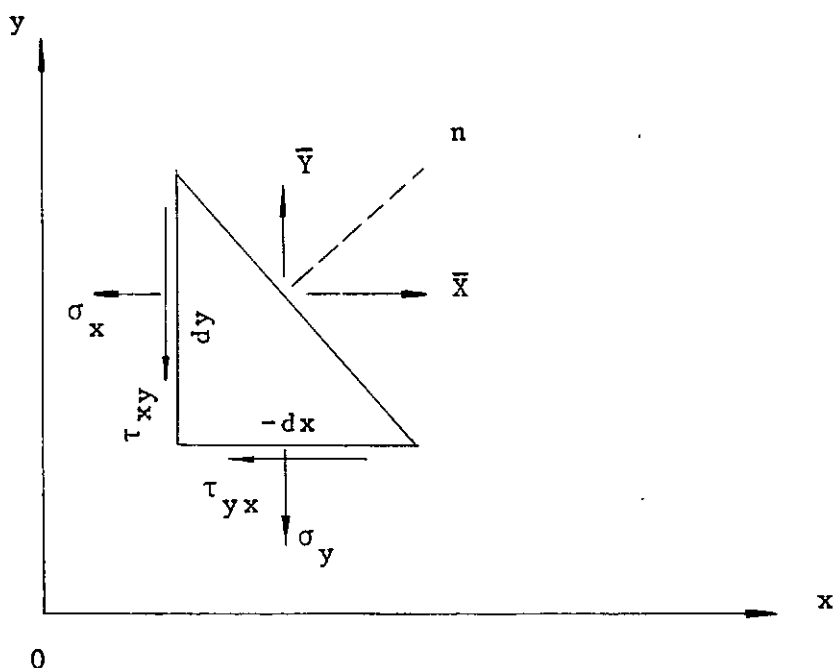


Figura 1.2

$$\begin{aligned}\bar{X}ds &= \sigma_x dy \delta - \tau_{xy} dx \delta \\ \bar{Y}ds &= \tau_{yx} dy \delta - \sigma_y dx \delta\end{aligned}\tag{1.19}$$

sendo  $\delta$  a espessura da chapa

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta} \bar{X} &= \sigma_x \frac{dy}{ds} + \tau_{xy} \frac{dx}{ds} \\ \frac{1}{\delta} \bar{Y} &= \tau_{yx} \frac{dy}{ds} + \sigma_y \frac{dx}{ds}\end{aligned}\tag{1.20}$$

Substituindo (1.13) em (1.20) obtém-se:



$$\frac{1}{\delta} \bar{X} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} \quad (1.21)$$

$$\frac{1}{\delta} \bar{Y} = - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{dx}{ds}$$

De (1.21) pode-se escrever:

$$\frac{1}{\delta} \bar{X} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{\delta} \bar{Y} = - \frac{d}{ds} \frac{\partial z}{\partial x}$$

Estas equações permitem representar as condições de contorno em termos da função  $z(x,y)$  e não mais em função das tensões. Isto equivale a dizer que o maior óbice para a solução da equação está superado.

Expressar as condições de contorno em função das tensões não só é muito difícil, como em alguns casos impossível.

A FUNÇÃO DAS TENSÕES ou de AIRY serve precisamente para solucionar este impasse, tornando as condições de contorno possíveis, o que não implica em ser fácil a sua determinação em qualquer caso.

De (1.22) resulta:

$$\int_{s_0}^s \frac{1}{\delta} \bar{X} ds = \frac{\partial z}{\partial y} - \left[ \frac{\partial z}{\partial y} \right]_{s_0}; \quad \int_{s_0}^s \frac{1}{\delta} \bar{Y} ds = \frac{\partial z}{\partial x} - \left[ \frac{\partial z}{\partial x} \right]_{s_0}$$

(1.23)

A primeira integral dará a resultante das forças de contorno, desde uma certa origem  $S_0$  até  $S$ , na direção de  $Ox$  e a segunda na direção de  $Oy$ .

Os termos  $\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{S_0}$  e  $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{S_0}$  são constantes arbitrárias; elas expressam o valor das derivadas de  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  no ponto  $S = S_0$  do contorno, isto é, na origem escolhida. Daí se depreende que a origem é arbitrária, sendo escolhida pelas conveniências do problema. É fácil de ver que esta escolha arbitrária não afeta as tensões, pois, se trata de acrescentar valores constantes, que podem dar origem a expressões lineares, mas estas se anulam com a derivada de segunda ordem.

Para que se visualize melhor o problema será feita uma analogia da seguinte maneira: assimilar o contorno do sólido que se está investigando a uma barra, que possui a mesma forma geométrica, a qual é cortada em uma origem  $S = S_0$  e nela se aplicam as forças oriundas do corte. Como é sabido nas faces do corte surgem três esforços, cortante, normal e um momento fletor.

Como a origem  $S = S_0$  é arbitrária, poder-se-á escolher um ponto, tal que os esforços seccionais sejam anulos.

Daí resulta a seguinte forma para (1.23)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \int_0^S \bar{X} \, ds \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{1}{\delta} \int_0^S \bar{Y} \, ds$$

onde as integrais representam a resultante dos esforços de

contorno no trecho  $S_0$  a  $S$ , nas direções  $Ox$  e  $Oy$  respectivamente. Pode-se, mais simplesmente, chamá-los de:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F_x \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -F_y \quad (1.24)$$

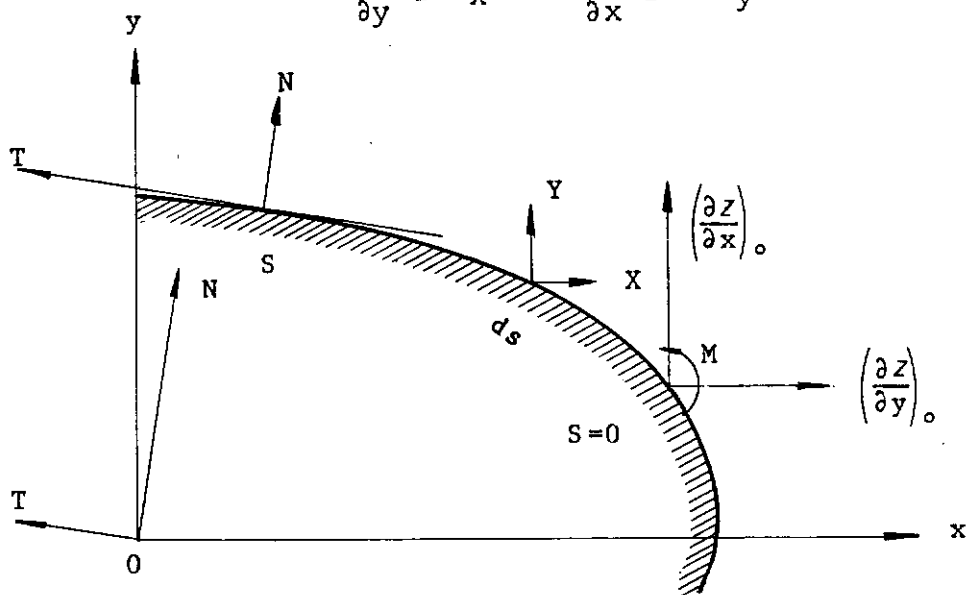


Figura 1.3

Tomando-se novos eixos  $ON$  e  $OT$ , dirigidos segundo a normal e a tangente respectivamente em  $S$ , em função do novo sistema de referência tem-se:

$$\frac{\partial z}{\partial N} = -F_T, \quad \frac{\partial z}{\partial T} = F_N \quad (1.25)$$

onde  $F_T$  e  $F_N$  representam, respectivamente, a resultante do esforço de contorno segundo a tangente e a normal, considerando os esforços desde uma origem  $S_0$  até o ponto  $S$ .

Sendo  $z$  uma função de  $(x, y)$ , pode-se escrever:

$$d = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

onde:  $d = \frac{1}{\delta} [(F_x dy - F_y dx)]$  por (1.24).

A integração por partes permitirá escrever que

$$z = \frac{1}{\delta} \left[ \int_0^s \bar{X} (y_S - y) ds + \int_0^s \bar{Y} (x - x_S) ds \right] \quad (1.26)$$

$$z = \frac{1}{\delta} M \quad (1.27)$$

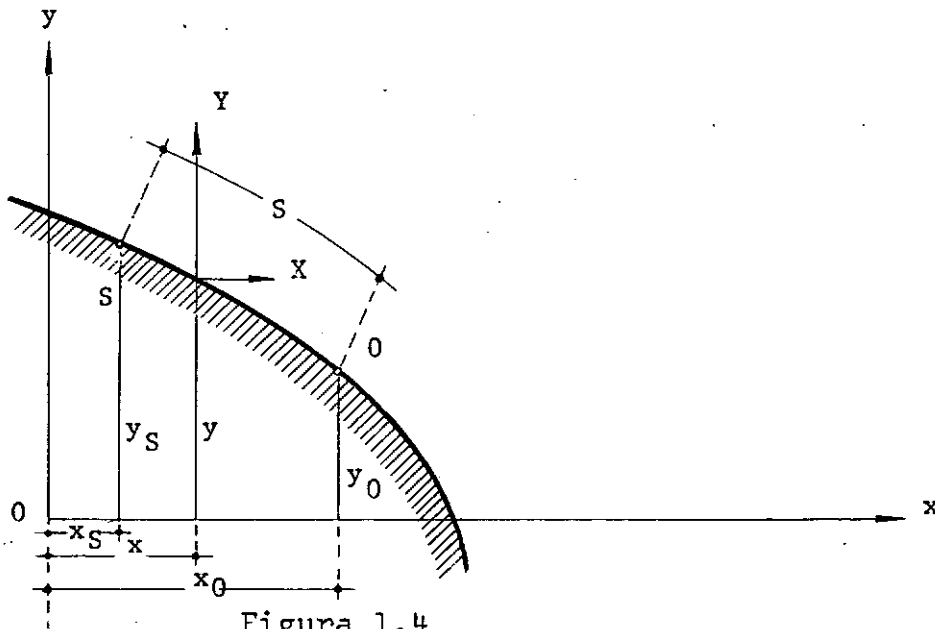


Figura 1.4

Da fórmula expressa em (1.26) e da Figura acima depreende-se que  $z$  será igual ao momento das forças aplicadas na parte  $S_0 S$  da barra em relação ao ponto  $S$ .

Assim sendo, as condições de contorno ficam determinadas, conhecendo-se o valor de  $z$  no contorno e de suas derivadas de primeira ordem em relação à tangente e à normal no ponto  $S$ .

## CAPÍTULO II - SOLUÇÃO APROXIMADA - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

### 2.1 - Considerações gerais

Normalmente, a equação (1.17) não tem solução exata. Em virtude disto, ter-se-á que lançar mão de métodos aproximados.

Dentre os métodos numéricos para a solução aproximada do problema, o das diferenças finitas se apresenta como um dos mais usados na resolução de problemas propostos pela teoria da elasticidade.

A configuração geométrica do contorno está a exigir uma malha triangular ou oblíqua e, como tal, não mais se usará o sistema cartesiano ortogonal e sim o de coordenadas triangulares ou oblíquas.

Estes sistemas de coordenadas exigirão que a equação (1.17) seja também expressada nos citados sistemas.

Coube ao autor chegar à expressão de (1.17) em coordenadas triangulares e coordenadas oblíquas, fato esse não muito difícil, contudo, muito trabalhoso.

De posse da expressão (1.17) em coordenadas triangulares e oblíquas, passou-se aos operadores em diferenças finitas, gerando-se com isto as moléculas básicas.

Estas moléculas básicas ou geradoras das equações, darão origem aos sistemas lineares, que contêm as funções  $z$

como incógnitas.

As funções  $z$  serão determinadas num número finito de pontos, relacionados através de (1.13), que serão igualmente expressados em diferenças finitas.

A primeira vista poderá parecer que, quanto mais refinada fôr a malha, melhor conhecido será o estado de tensões do corpo. A realidade, porém, é outra, não sendo permitido o raciocínio anterior sem restrições.

O refinamento terá um ponto ótimo, além do qual os resultados não convergirão mais. Achar êste ponto ótimo, ou pelo menos discuti-lo, envolverá problemas matemáticos superiores às pretensões dêste trabalho.

A afirmativa de que o refinamento poderá ser prejudicial parece ser paradoxal. A explicação reside no fato de que a solução do problema, como ocorre com toda a solução numérica, introduz um determinado erro, suscetível de se propagar, muitas vezes em consonância com o número de equações geradas.

## 2.2 - Escolha do tipo de malha

O tipo de malha dependerá diretamente da configuração do contorno.

É certo que se poderá tomar numa determinada malha e adotá-la para qualquer configuração do contorno, mas êste procedimento implicará em dois prováveis problemas. O primeiro será o aparecimento de pontos não igualmente espaçados, daí resultando as malhas irregulares. O segundo seria o problema da conver-

gência dos resultados, condicionados pelo sistema de equações.

O primeiro problema é muito importante pela alta complexidade no ato de gerar as equações lineares. Do segundo nada se pode afirmar, porquanto só um estudo detalhado poderá comprovar ou não, aquilo que intuitivamente parece certo.

Na tentativa de evitar o primeiro problema, procurou-se um tipo de malha que se ajustasse ao contorno de uma maneira regular. Com isto, evitou-se também as possíveis consequências do segundo.

Há duas malhas que se adaptam ao contorno com regularidade, a triangular e a oblíqua. Somente os resultados poderão comprovar qual a mais eficaz, embora pareça ser a oblíqua, principalmente quando o ângulo  $\alpha$  se aproxima de  $90^\circ$  graus.

Inicialmente será desenvolvido o sistema em coordenadas triangulares e posteriormente em oblíquas.

### 2.3 - Laplaciano em coordenadas triangulares

Um dos sistemas de coordenadas não cartesiano, comumente usado para cobrir os domínios de chapas irregulares, é o sistema de coordenadas triangulares<sup>6</sup>.

A correlação entre o sistema cartesiano e o sistema de coordenadas triangulares será estudada a seguir.

É sabido que no plano somente duas coordenadas são linearmente independentes. A terceira sempre poderá ser escrita em função das outras duas.

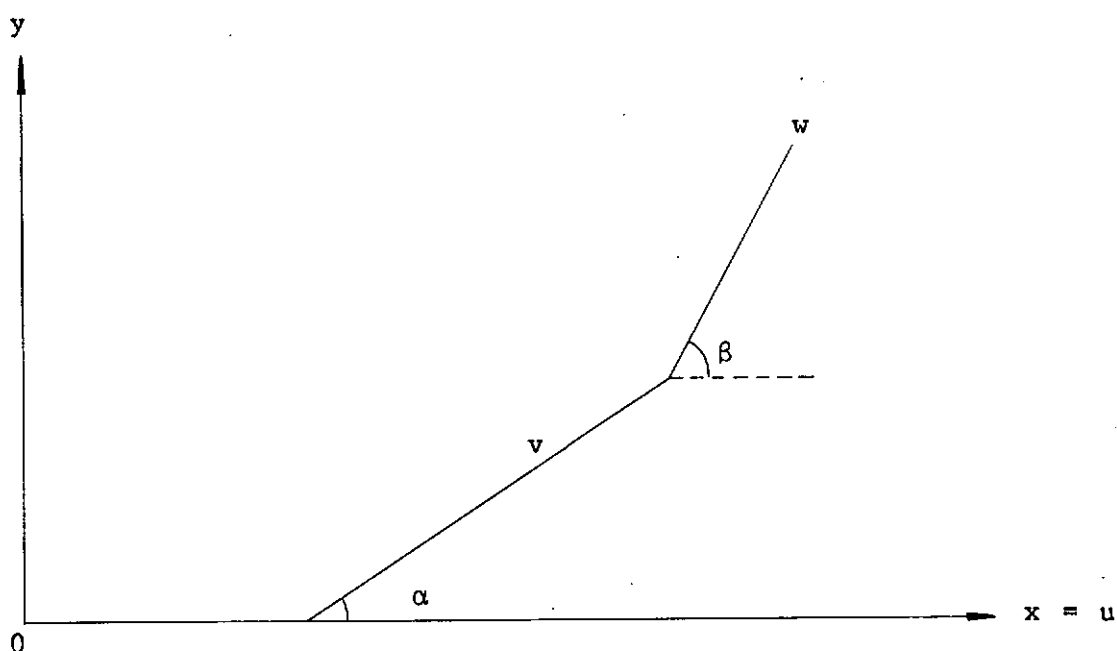


Figura 2.1

Assumindo a direção de  $Ou$  coincidente com  $Ox$  e chamando de  $\alpha$  e  $\beta$  os ângulos entre  $v$  e  $u$ ,  $w$  e  $u$ , a transformação para coordenadas cartesianas será:

$$\begin{aligned} x &= u + v \cos \alpha + w \cos \beta \\ y &= v \sin \alpha + w \sin \beta \end{aligned} \quad (2.1)$$

As derivadas parciais de  $x$  e  $y$  em relação a  $u$ ,  $v$  e  $w$  serão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= 1 ; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \cos \alpha ; \quad \frac{\partial x}{\partial w} = \cos \beta ; \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= 0 ; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sin \alpha ; \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \sin \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

A função  $Z(x, y)$  pode ser considerada como de  $u$ ,  $v$  e  $w$ , através das funções intermediárias  $x$  e  $y$ . Em decorrência disto pode-se afirmar:



$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial Z}{\partial x} ;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial Z}{\partial y} \sin \alpha ;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial w} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial Z}{\partial y} \sin \beta$$

(2.3)

Derivando novamente, obtêm-se as derivadas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} ;$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \sin^2 \alpha ; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \cos^2 \beta + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \cos \beta \sin \beta + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \sin^2 \beta$$

das duas últimas equações de (2.4) pode-se extrair o valor de

$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$  e  $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ , que são:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = - \frac{1}{D} \left[ \frac{\partial^2 Z}{\partial w^2} \sin 2\alpha - \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \sin 2\beta + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} \cos \alpha \cos \beta \sin(\beta - \alpha) \right] \quad (2.5)$$

sendo  $D = 2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha - \beta)$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = - \frac{1}{D} \left[ \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \sin^2 \beta - \frac{\partial^2 Z}{\partial w^2} \sin^2 \alpha + \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha) \right] \quad (2.6)$$

Continuando a derivar as expressões (2.4), pode-se verificar que a derivada subsequente se obtém através da multiplicação simbólica. Por exemplo, para se obter  $\frac{\partial^3 Z}{\partial v^3}$ , basta a se

guinte operação:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \right] = \frac{\partial^3 Z}{\partial v^3} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right] \left[ \frac{\partial Z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial Z}{\partial y} \sin \alpha \right],$$

onde se tem, após as simplificações possíveis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 Z}{\partial v^3} = & \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} \cos^3 \alpha + 3 \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y} \sin \alpha \cos^2 \alpha + 3 \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & + \frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} \sin^3 \alpha \end{aligned} \quad (2.7)$$

Desejando obter  $\frac{\partial^4 Z}{\partial v^4}$ , pode-se continuar o processo sobre a derivada de terceira ordem. Daí resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 Z}{\partial v^4} = & \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} \cos^4 \alpha + 4 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^3 \partial y} \cos^3 \alpha \sin \alpha + 6 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \\ & + 4 \frac{\partial^4 Z}{\partial x \partial y^3} \cos \alpha \sin^3 \alpha + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} \sin^4 \alpha \end{aligned} \quad (2.8)$$

De uma maneira análoga apareceriam as expressões de  $\frac{\partial^4 Z}{\partial w^4}$  e  $\frac{\partial^4 Z}{\partial v^2 \partial w^2}$ . (2.9)

No caso em estudo o ângulo  $\beta$  assume um valor particular que é  $\beta = \pi - \alpha$ , daí afirmar-se que:

$$\cos \beta = -\cos \alpha; \quad \sin \beta = \sin \alpha \quad (2.10)$$

De posse dos valores particulares de  $\beta$  e suas linhas trigonométricas, escreve-se os novos valores para a expres

sar (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 Z}{\partial w^4} = & \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} \cos^4 \alpha - 4 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^3 \partial y} \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha + 6 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha - \\ & - 4 \frac{\partial^4 Z}{\partial x \partial y^3} \operatorname{sen} \alpha \cos^3 \alpha + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} \operatorname{sen}^4 \alpha \end{aligned} \quad (2.11)$$

Procedendo de maneira análoga chega-se a expressão de  $\frac{\partial^4 Z}{\partial v^2 \partial w^2}$ , que é a seguinte:

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial v^2 \partial w^2} = \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} \cos^4 \alpha - 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} \operatorname{sen}^4 \alpha \quad (2.12)$$

Somando, membro a membro, as expressões (2.8), (2.11) e (2.12), aparecerá o valor de  $\frac{\partial^4 Z}{\partial y^4}$ , escrita assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = & \frac{1}{4 \operatorname{sen}^4 \alpha} \left[ \frac{\partial^4 Z}{\partial v^4} + \frac{\partial^4 Z}{\partial w^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial v^2 \partial w^2} + 4 \frac{\partial^4 Z}{\partial w^4} \cos^4 \alpha - 4 \cos^2 \alpha \right. \\ & \left. \frac{\partial^4 Z}{\partial v^2 \partial u^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial w^2 \partial u^2} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Assumindo o valor particular de  $\beta$ , a expressão de D se torna:

$$D = - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen} 2\alpha;$$

Este valor será introduzido na expressão (2.5) e como resulta do tem-se:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \left[ \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial w^2} - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} \cos^2 \alpha \right] \quad (2.14)$$

Aplicando a operação simbólica para se obter  $\frac{\partial^4 Z}{\partial y^2 \partial x^2}$

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left[ \frac{\partial^4 Z}{\partial w^2 \partial v^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial v^2 \partial w^2} - 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial v^4} \cos^2 \alpha \right] \quad (2.15)$$

Esta lei de multiplicação simbólica permitirá de -  
terminar:

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 Z}{\partial u^4} \quad (2.16)$$

Estas expressões são necessárias para se obter o bilaplaciano em coordenadas triangulares. Para tal, retorna-se a (1.17), que é:

$$\nabla^4 Z = \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} \quad (1.17)$$

A simples substituição de  $Z$  por  $z$  e a introdução de (2.13), (2.15) e (2.16), resultam em:

$$\nabla^4 z = \frac{1}{4 \sin^4 \alpha} \left[ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial w^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial v^2 \partial w^2} - 4 \left( \frac{\partial^4 z}{\partial v^2 \partial u^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial w^2 \partial u^2} \right) \cos^2 2\alpha + 4 \frac{\partial^4 z}{\partial u^4} \cos^2 2\alpha \right] \quad (2.18)$$

A expressão (2.18), representa o mesmo que a -  
(1.17), só que em coordenadas triangulares.

#### 2.4 - Os operadores de 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordem, em diferenças finitas

Como se sabe a equação (2.18) será resolvida através do método das Diferenças Finitas.

A técnica é simples e consiste na substituição de

uma diferencial (diferença com intervalo infinitesimal), por uma diferença finita (diferença com intervalo finito).

As diferenças centrais foram escolhidas, tendo - em vista a sua maior precisão e o seu largo emprêgo na solução de problemas de condições de cômorno.

Será abordado apenas o estritamente necessário - para a compreensão do problema.

Logo a seguir será mostrado como se obtêm aproximações para derivadas parciais.

Seja a função  $z = f(x,y)$ . Desenvolvendo  $f(x+h,y)$  e  $f(x-h,y)$  em séries de Taylor, nas vizinhas de  $(x,y)$ , obtêm-se:

$$f(x+h,y) = f(x,y) + h \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(\xi_1, y) \quad (2.19)$$

$$f(x-h,y) = f(x,y) - h \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(\xi_2, y) \quad (2.20)$$

somando-se, membro a membro, (2.19) e (2.20) obter-se-á:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{1}{h^2} [f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)] - \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} [f(\xi_1, h) + f(\xi_2, h)] \quad (2.21)$$

A expressão (2.21) poderá ser escrita de uma maneira mais sintética:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{1}{h^2} \left[ f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y) \right] + O(h^2) \quad (2.22)$$

De uma maneira análoga seriam obtidas as expressões:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{2h} \left[ f(x+h,y) - f(x-h,y) \right] + O(h^2) \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4} \left[ f(x+2h,y) - 4f(x+h,y) + 6f(x,y) - 4f(x-h,y) + f(x-2h,y) \right] + O(h^2) * \quad (2.24)$$

Como se pode observar das expressões (2.22), (2.23) e (2.24), o erro de truncamento é da ordem de  $h^2$ .

O elemento triangular, que determinará, em seus vértices, os pontos da malha e, como tal, os intervalos finitos, onde será aplicada (2.18), será:

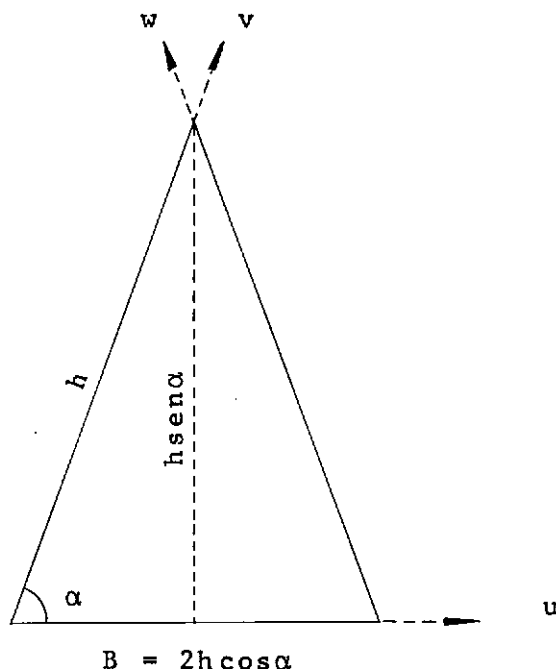


Figura 2.2

\*  $O(h^K)$  significa o erro de truncamento, onde o incremento  $h$  aparece elevado à potência  $K$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 z}{\partial v^4} &= \frac{\Delta_v^4 z}{h^4} ; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial w^4} = \frac{\Delta_w^4 z}{h^4} ; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial v^2 \partial w^2} = \frac{\Delta_v^2 \Delta_w^2 z}{h^4} ; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial v^2 \partial u^2} = \frac{\Delta_{vu}^4 z}{4h^4 \cos^2 \alpha} ; \\ \frac{\partial^4 z}{\partial w^2 \partial u^2} &= \frac{\Delta_{wu}^4 z}{4h^4 \cos^2 \alpha} ; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial u^4} = \frac{\Delta_u^4 z}{16h^4 \cos^4 \alpha} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Substituindo as diferenciais de (2.18) pelas diferenças dadas em (2.25), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \Delta^4 z &= \frac{1}{4 \sin^4 \alpha} \left[ \frac{\Delta_v^4 z}{h^4} + \frac{\Delta_w^4 z}{h^4} + 2 \frac{\Delta_v^2 \Delta_w^2 z}{h^4} - \frac{\cos 2\alpha}{h^4 \cos^2 \alpha} (\Delta_v^2 \Delta_u^2 + \Delta_w^2 \Delta_u^2) z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos^2 2\alpha}{4h^4 \cos^4 \alpha} \Delta_u^4 z \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

A expressão (2.26) representa, em Diferenças Finitas, a equação (2.18).

As expressões (2.22), (2.23) e (2.24) permitirão o desenvolvimento das expressões  $\Delta$ ,  $\Delta^2$ ,  $\Delta^4$ .

## 2.5 - Molécula Geradora das Equações

A obtenção da Molécula Geradora se faz, tomando - um ponto central (i,j) e desenvolvendo (2.26), de acordo com (2.22) e (2.24).

Uma vez feitas as operações e simplificações, obtêm-se a seguinte expressão para (2.26).

$$\text{chamando de } F = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \text{ e } F^2 = \frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^4 \alpha} \quad (2.27)$$

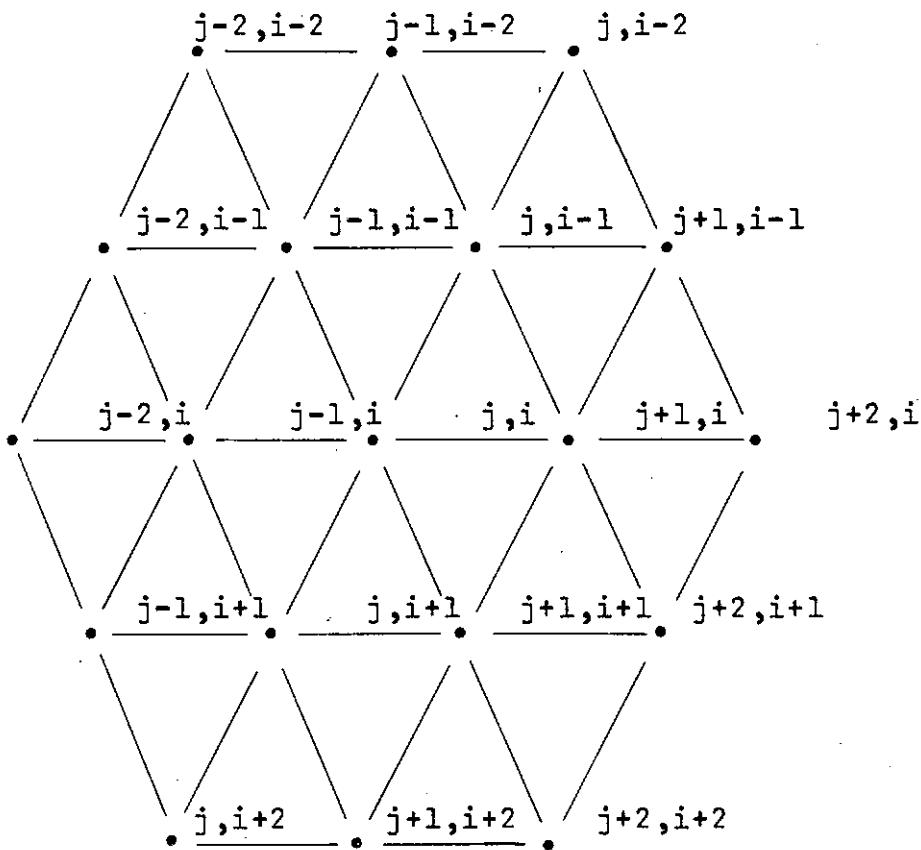


Figura 2.3

$$\begin{aligned}
 \Delta^4 z = \frac{1}{4 \operatorname{sen}^4 h^4} & \left[ z_{j-2, i-2} + 2 z_{j-1, i-2} + z_{j, i-2} - F z_{j-2, i-1} - \right. \\
 & - z_{j, i-1} (8-F) - (8-F) z_{j-1, i-1} - F z_{j+1, i-1} + \\
 & + \frac{F^2}{4} z_{j+2, i} + (2+4F-F^2) z_{j+1, i} + \frac{(20-8F+6F^2)}{4} \\
 & z_{j, i} + (2+4F-F^2) z_{j-1, i} + \frac{F^2}{4} z_{j-2, i} - F z_{j-1, i+1} \\
 & - F z_{j+2, i+1} + (8-F) z_{j, i+1} + (8-F) z_{j+1, i+1} + \\
 & \left. + z_{j, i+2} - 2 z_{j+1, i+2} + z_{j+2, i+2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$



Os coeficientes dos pontos da malha, vértices - dos triângulos, serão os coeficientes da molécula geradora das equações.

Para maior compacidade da simbologia, fêz-se a seguinte correlação:

$$(20-8F+\frac{6F^2}{4}) = K_1 ; (2+4F-F^2) = K_2 ; \frac{F^2}{4} = K_3 ;$$

$$- (8-F) = K_4 ; - F = K_5$$

Antes de apresentar a expressão final da molécula sob uma forma compacta, deve-se dizer que os coeficientes - da molécula, dos quais se originarão as equações lineares, que por sua vez determinarão os valores da função nos pontos internos, dependem exclusivamente do ângulo de inclinação do contorno em relação ao eixo  $Ou = Ox$ .

A molécula geradora terá a forma e coeficientes vistos na Figura 2.4 .

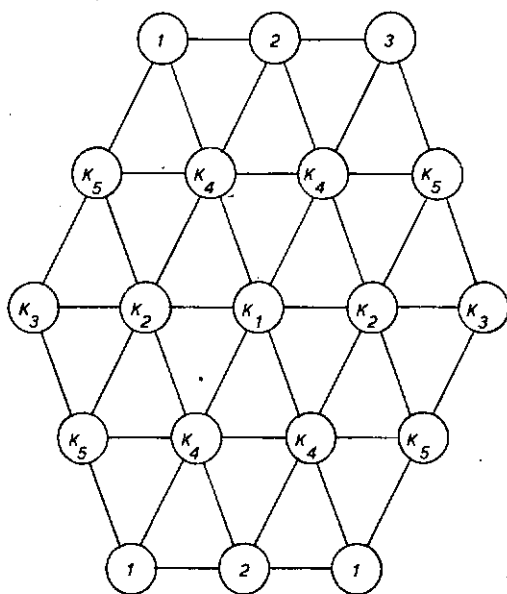


Figura 2.4

## 2.6 - Diferenças Finitas em coordenadas oblíquas

O sistema de coordenadas oblíquas às vezes é usado com certa vantagem, em relação ao sistema de coordenadas triangulares.

O autor não se deterá em detalhes, uma vez que a semelhança entre ambos é bastante evidente.

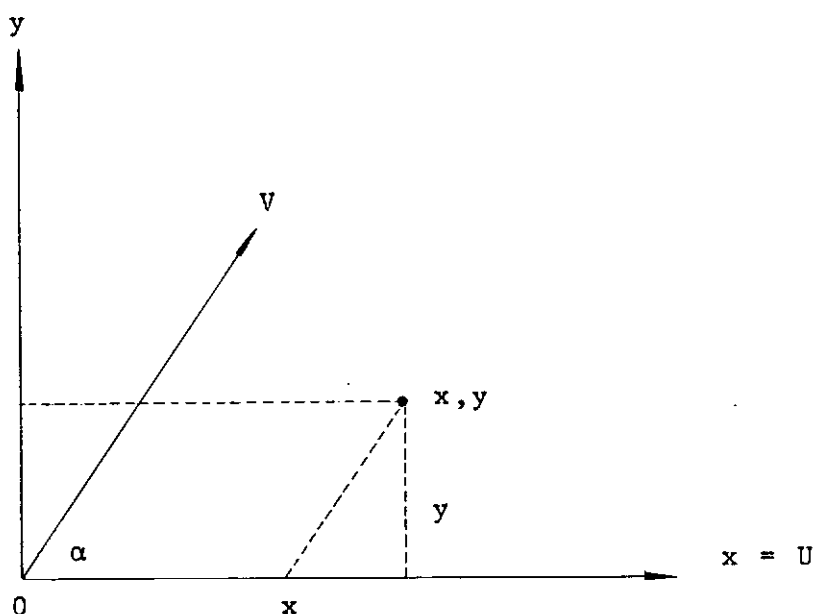


Figura 2.5

$$x = U + V \cos \alpha ; y = V \sin \alpha \quad (2.30)$$

$$U = x - \frac{y}{\tan \alpha} ; V = \frac{y}{\sin \alpha} \quad (2.31)$$

então:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 ; \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\tan \alpha} ; \frac{\partial V}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (2.32)$$

Considerando-se a função  $Z(U, V)$ , na qual  $U$  e  $V$  são funções de  $x$  e  $y$ , tem-se:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial U}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = - \frac{1}{\tan \alpha} \frac{\partial Z}{\partial U} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial Z}{\partial V}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial U^2} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 Z}{\partial U^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 Z}{\partial U \partial V} + \frac{\partial^2 Z}{\partial V^2} \right)$$

O Laplaciano em coordenadas oblíquas:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \nabla^2 Z = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial U^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 Z}{\partial U \partial V} + \frac{\partial^2 Z}{\partial V^2} \right) \quad (2.34)$$

De posse do Laplaciano, obtém-se a expressão - das derivadas em diferenças através de (2.22) e (2.24):

$$\nabla^2 Z = \frac{1}{2K^2 h^2 \sin^2 \alpha} \left[ 2K^2 \Delta_u^2 Z - K \cos \alpha \Delta_u \Delta_v Z + 2 \Delta_v^2 Z \right] \quad (2.35)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} 2K^2 h^2 \sin^2 \alpha \nabla^2 Z = & 2K^2 (z_{i,j-1} - 2z_{i,j} + z_{i,j+1}) - K \cos \alpha (z_{i-1,j-1} - \\ & - z_{i-1,j+1} + z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j-1}) + 2(z_{i-1,j} - \\ & - 2z_{i,j} + z_{i+1,j}) \end{aligned} \quad (2.36)$$



### CAPÍTULO III - ESTUDO DAS TENSÕES

#### 3.1 - Considerações Gerais

Como se sabe, são as tensões fundamentais para o dimensionamento de qualquer peça estrutural.

As placas de estrutura delgada, com carregamento no seu próprio plano, possuem tensões planas de tração, com - pressão e cisalhamento.

A própria condição fundamental é escrita em termos de tensões. Basta se reportar à expressão (1.11).

Justamente a dificuldade de se obter condições - de contorno em função das tensões, é que condicionou o apareci-  
mento da função  $z$ , chamada função das tensões ou de Airy.

Esta função das tensões determina um relaciona-  
mento entre o carregamento, atuante no corpo, a configuração -  
do contorno e as tensões nos pontos da malha. Basta recordar a  
expressão (1.13), para se conhecer o tipo de relacionamento en-  
tre  $z$  e as tensões.

Uma vez obtido os  $z$  internos pela aplicação da  
molécula da figura (2.4) em cada ponto interno; os  $z$  do con-  
torno são conhecidos através de (1.27) e obtidos os pontos ex-  
ternos fictícios por meio de (1.24) e (1.25). Assim o sistema  
de equações gerado fica determinado. Resolve-se o sistema e  
suas raízes representam os  $z$  internos.

O conhecimento desses valores possibilitará o

cálculo das tensões, desde que (1.13) sejam tomadas em diferenças finitas.

### 3.2 - A expressão das tensões em diferenças finitas

A solução numérica está a exigir a substituição das diferenciais pelas diferenças. Assim sendo, as relações (1.13) que são escritas:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \sigma_x \quad ; \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \sigma_y \quad ; \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \tau_{xy} \quad (1.13)$$

passam a ser representadas por:

$$\sigma_x = \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \left[ \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial w^2} - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} \cos^2 \alpha \right] ; \quad (3.1)$$

validada através da expressão (2.14);

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} \quad (3.2)$$

retirada das expressões (2.4)

e finalmente

$$\tau_{xy} = - \frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \left[ \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial w^2} \right] \quad (3.3)$$

esta expressão será obtida se diminuirmos a 3<sup>a</sup> de (2.4) da 2<sup>a</sup> do próprio (2.4).

Com as expressões de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  em coordenadas triangulares em (3.1), (3.2) e (3.3), faz-se a passagem destas expressões para diferenças finitas. Para tanto deve-se atentar para (2.25) e daí resulta:

$$\sigma_x = \frac{1}{4h^2 \sin^2 \alpha} \left[ 2(\Delta_v^2 + \Delta_w^2)z - \Delta_u^2 z \right] ; \quad (3.4)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{4h^2 \cos^2 \alpha} \Delta_u^2 z ; \quad (3.5)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{1}{4h^2 \sin \alpha \cos \alpha} \left[ \Delta_v^2 z - \Delta_w^2 z \right] \quad (3.6)$$

Aplicando-se estas expressões a um ponto  $(j,i)$ , pode-se obter uma molécula geradora das tensões.

$$\sigma_x = \frac{1}{4h^2 \sin^2 \alpha} \left[ 2(z_{j-1,i-1} - 2z_{j,i} + z_{j+1,i+1} + z_{j,i-1} - 2z_{j,i} + z_{j,i+1}) - (z_{j-1,i} - 2z_{j,i} + z_{j+1,i}) \right] \quad (3.7)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{4h^2 \cos^2 \alpha} \left[ z_{j-1,i} - 2z_{j,i} + z_{j+1,i} \right] \quad (3.8)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-1}{4h^2 \sin \alpha \cos \alpha} \left[ z_{j,i-1} - z_{j-1,i-1} + z_{j,i+1} - z_{j+1,i+1} \right] \quad (3.9)$$

Estas últimas expressões ensejam a obtenção de uma molécula geradora das tensões em coordenadas triangulares.

$$\sigma_y = \frac{1}{4h^2 \cos^2 \alpha} \times \begin{array}{c} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{-2} \text{---} \textcircled{1} \end{array}$$

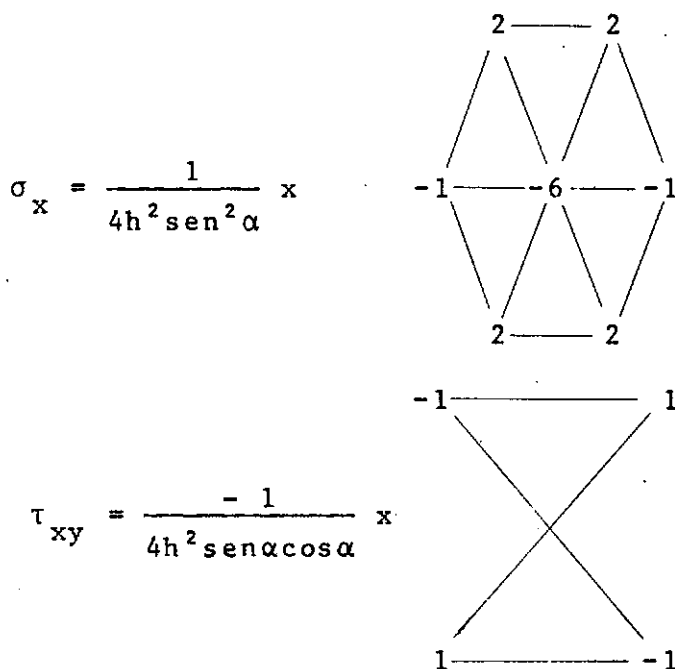


Figura 3.1

As moléculas geradoras das tensões em coordena - das oblíquas são:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2K^2 h^2 \sin^2 \alpha} \left[ 2K^2 \cos^2 \Delta_u^2 z - K \cos \Delta_u \Delta_v z + 2\Delta_v^2 z \right]$$

(3.10)

A molécula geradora é:

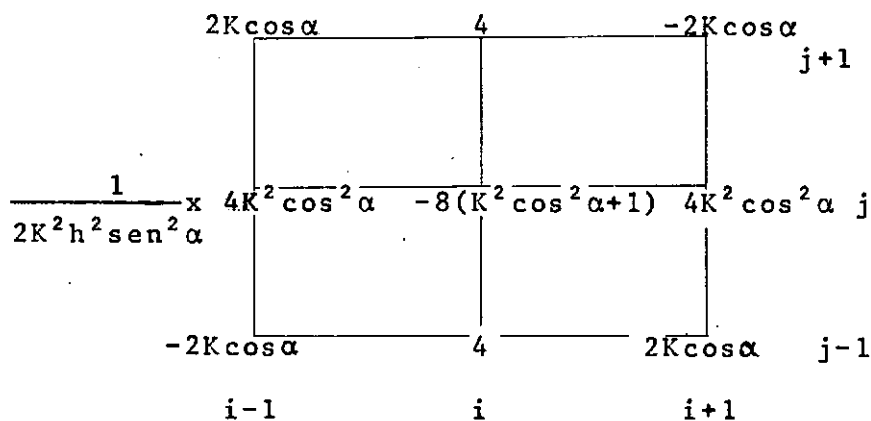


Figura 3.2



$$\sigma_y = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} = \frac{1}{h^2} \Delta_u^2 Z \quad (3.11)$$

A molécula geradora é:

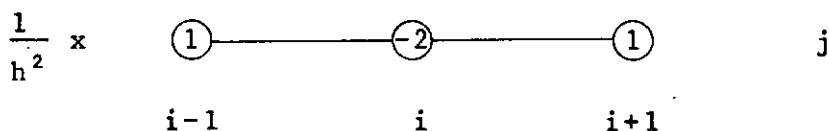


Figura 3.3

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = - \frac{1}{4Kh^2 \sin \alpha} \left[ \Delta_u Z \Delta_v Z - 4K \cos \alpha \Delta_u^2 Z \right] \quad (3.12)$$

A molécula geradora é:

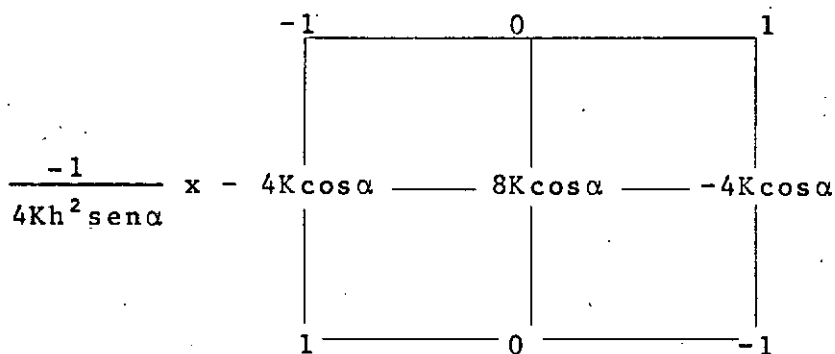


Figura 3.4

Nas figuras acima tem-se as moléculas geradoras das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  respectivamente.

### 3.3 - Tensões principais

Como já foi dito, as tensões são fundamentais - para o dimensionamento da peça estrutural. Este dimensionamento requer a obtenção das tensões principais e, é esta determinação que se está buscando.

Será útil rememorar o que consta na fórmula - (1.3) e na Figura 1.1 .

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \operatorname{sen}(nx) ; \\ \sigma_{ny} &= \tau_{yx} \cos(nx) + \sigma_y \operatorname{sen}(nx) ;\end{aligned}\quad (1.3)$$

ainda na Figura 1.1 depreende-se:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{nx} \cos(nx) + \sigma_{ny} \operatorname{sen}(nx) ; \\ \tau_n &= \sigma_{nx} \operatorname{sen}(nx) - \sigma_{ny} \cos(nx) ;\end{aligned}\quad (3.13)$$

introduzindo os valores de (1.3) em (3.13) resulta:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \operatorname{sen}^2(nx) + \tau_{xy} \operatorname{sen}2(nx) \quad (3.14)$$

expressão da tensão normal, em função de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , segundo uma seção, cuja normal forma um ângulo  $(nx)$  com  $Ox$ .

A tensão  $\sigma_n$ , é pois uma função do ângulo  $(nx)$  e, para se determinar o seu valor máximo, tem-se que derivar - (3.14) em relação a  $(nx)$  e igualar a zero.

$$\frac{d\sigma_n}{d(nx)} = -2\sigma_x \cos(nx)\operatorname{sen}(nx) + 2\sigma_y \operatorname{sen}(nx)\cos(nx) + 2\tau_{xy} \cos2(nx) = 0$$

$$(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2(n\alpha) + 2\tau_{xy} \cos 2(n\alpha) = 0$$

(3.15)

$$\operatorname{tg} 2(n\alpha) = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

êste será o valor do ângulo  $(n\alpha)$  para o qual a tensão normal é máxima.

Da expressão (3.15) retira-se o valor particular de  $(n\alpha)$ , que será denominado de  $\theta$ .

Usando conhecidas propriedades trigonométricas, será possível determinar os valores de  $\sigma_n$ , máximos e mínimos, taxando-os de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente.

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.16)$$

## CAPÍTULO IV - APLICAÇÕES

### 4.1 - Estruturas Analisadas

Serão estudados dois grupos de placas de espessura delgada com carregamento no seu próprio plano, também chamadas de chapas, evidenciados pela configuração do contorno.

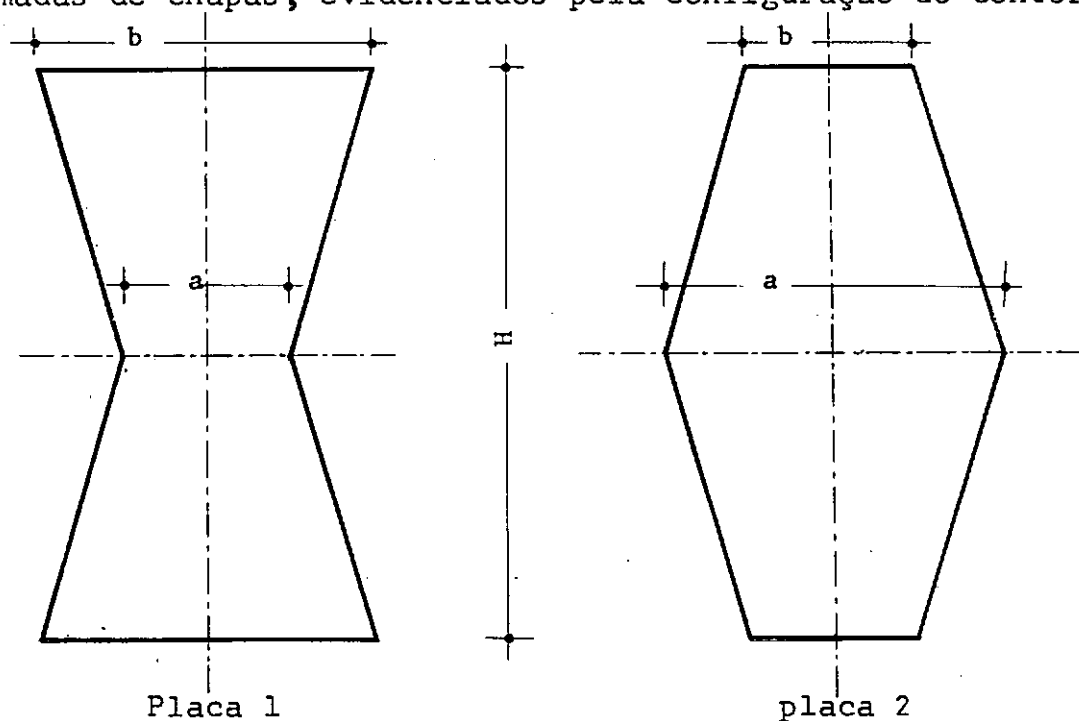


Figura 4.1

Placa - 1A : será coberta por uma malha (10x10) em coordenadas triangulares e coordenadas oblíquas.

Placa - 1B e 1C : serão cobertas por uma malha (24x24) em coordenadas triangulares e oblíquas.

Placa - 2A e 2B : serão cobertas por uma malha (27x27) em coordenadas triangulares e oblíquas.

Placa - 1A e 1B com um ângulo  $\alpha$ , tal que a  $\text{tg } \alpha = 3,33$

Placa - 2A com um ângulo  $\beta$ , tal que a  $\text{tg } \beta = - 3,33$

Placa - 1C e 2B com ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , tais que  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$  e  $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{3}$  respectivamente.

Em tôdas as situações o carregamento será uniformemente distribuído ao longo dos bordos superior e inferior e igual a  $p$  t/m ou  $p$  Kg/cm, daí se ter as tensões em  $t/m^2$  ou  $\text{Kg/cm}^2$ . É evidente que a carga atuante na placa não deve provocar instabilidade elástica, isto é, deve se manter abaixo do valor crítico.

De tudo o que foi dito, conclui-se que as estruturas terão simetria de forma, vinculação e carregamento e, como tal, será lícito examinar o comportamento de sua quarta parte, tomada em relação aos dois eixos de simetria.

A espessura  $\delta$  das placas será constante ao longo do contorno, com valor de  $\delta$ , tal que  $P_0 = p/\delta = 1t$  ou  $1\text{Kg}$ . O corpo será simplesmente conexo e todo o material terá o mesmo módulo de elasticidade  $E$ . Como se trata de um problema do estado plano de tensões, independente das constantes elásticas, não se necessita, nem o valor particular de  $E$ , nem o de  $\nu$ .

#### 4.2 - Molécula Geradora Específica

Partindo da Molécula Geradora da Figura (2.4), determinaremos os valores específicos dos coeficientes  $K_5, K_1, K_2, K_3, K_4$ , em função da  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Nos casos 1A e 1B,  $\operatorname{tg} \alpha = 3.333$ ,  $F = -10,109$

e  $F^2 = 102,192$  , reportar-se a (2.28).

Com os valores específicos de  $F$  e  $F^2$ , calculam-se as expressões (2.29), cujos resultados serão indicados - abaixo:

$$\begin{aligned} K_1 &= 254,24 \quad ; \quad K_2 = -140,68 \quad ; \quad K_3 = 25,56 \quad ; \\ K_4 &= -18,11 \quad ; \quad K_5 = 10,11 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para o cálculo dos coeficientes da molécula de 2A, ter-se-ia  $\text{tg} \alpha = -3,33 = -\text{tg} \alpha$  , mas como no cálculo de  $F$  e  $F^2$ , a tangente comparece elevada ao expoente 2, a situação será idêntica à das placas 1A e 1B.

Do que se disse acima, pode-se afirmar que a molécula geradora específica das placas 1A, 1B e 2A, será a mesma, consubstanciada na Figura 4.3 .

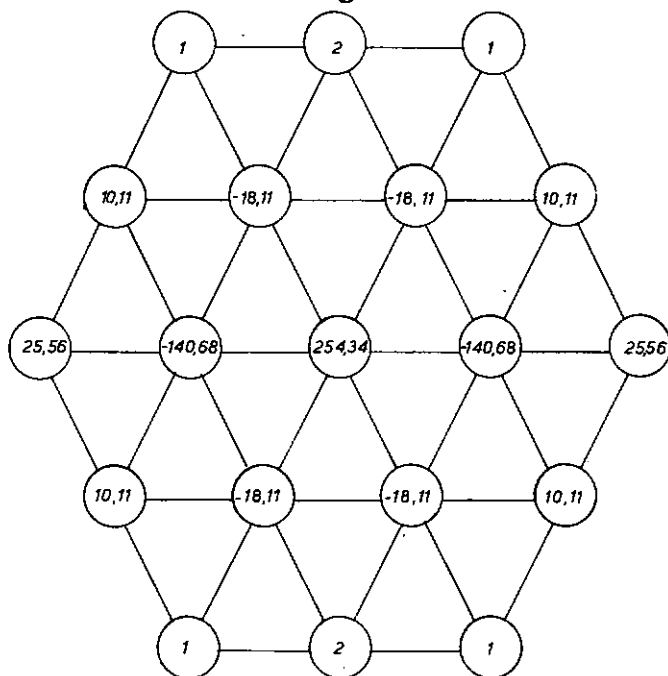


Figura 4.2

Para as placas 1C e 2B, em que  $\alpha=60^\circ$  e  $\beta=120^\circ$  respectivamente, teremos  $F = -2$  e  $F^2 = 4$ , de (2.28) resulta:

$$K_1 = 42; K_2 = -10; K_3 = 1; K_4 = -10; K_5 = 2 \quad (4.2)$$

Assim sendo, pode-se escrever a molécula geradora específica, tanto para 1C como para 2B, cujos valores irão coincidir com os existentes na Figura 5.46, pg. 247 de Salvatore e Baron<sup>6</sup>.

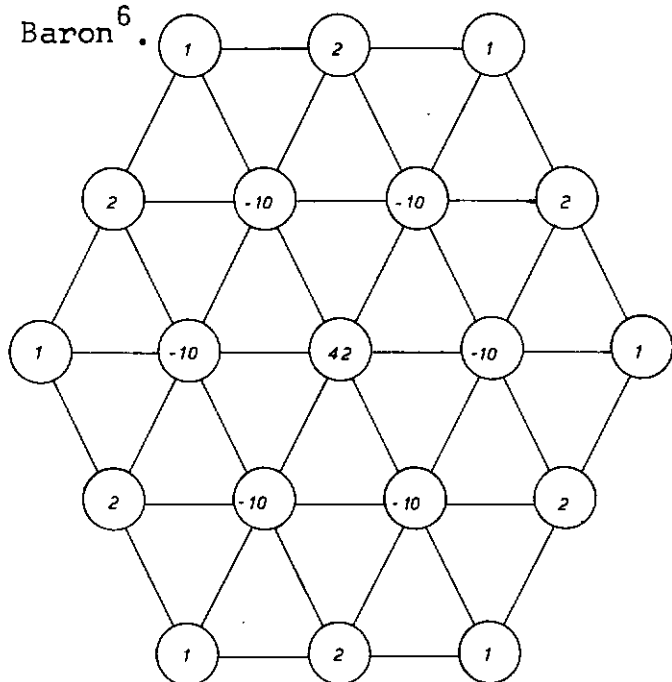


Figura 4.3

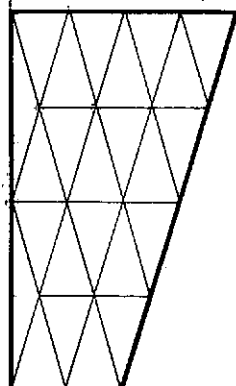
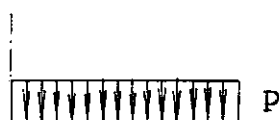
#### 4.3 - Pontos do Contorno

A teoria é suficientemente explícita no tocante aos pontos do contorno. A situação nova que se apresenta é a do contorno ser formado por ângulos internos diferentes de  $90^\circ$  como usualmente aparecem os problemas resolvidos na literatura.

A assimilação do contorno a uma viga em balanço é perfeita e pode ser facilmente constatada na Figura 1.4 e no exame da fórmula (1.26).

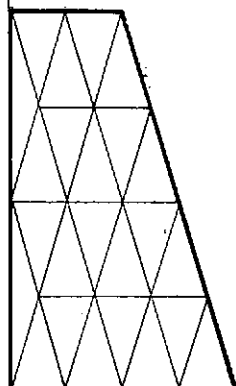
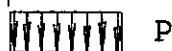
A origem escolhida, será ditada pela simetria e conveniência do problema específico. Como já se sabe, a origem é arbitrária (ver Capítulo I).

Como as tensões são dadas em função das derivadas de segunda ordem de  $z$ , esta escolha arbitrária não as afetará qualquer que seja a origem escolhida.



Placa 1

Figura 4.4



Placa 2

Figura 4.5

Dada a simetria total de carregamento, vinculação e forma, pode-se adotar apenas a quarta parte da placa, para se conhecer a plenitude de seu comportamento.

Os pontos do contorno receberão uma notação diferente da dos internos, justamente para os diferenciar. Se -



rão anotados em algarismos romanos, enquanto os internos o serão em arábicos.

A origem escolhida é 0, e o caminhamento será da esquerda para a direita.

Usualmente se tem, na literatura sôbre o assunto, um caminhamento da direita para a esquerda<sup>3</sup>, mas há exemplos resolvidos com caminhamento inverso<sup>2</sup>.

O contôrno sendo assimilável a uma viga em balanço, fará com que o sinal do momento seja o mesmo, em qualquer dos dois sentidos.

Relembrando que os espaçamentos entre os pontos da borda superior são iguais entre si, pois, a malha é regular e tem um valor igual a  $2h\cos\alpha$  (Figura 2.2). Esse espaçamento entre pontos do contôrno, no bordo superior, será anotado por  $B = 2h\cos\alpha$ .

Conhecidas estas preliminares e munidos da fórmula (1.26), pode-se calcular os valores de  $z$  do contôrno.

Na fórmula (1.26), de acôrdo com o que está expresso em (1.22), sabendo-se que o carregamento, por ser vertical, não admitirá componente horizontal, tem-se:

$$z = \frac{1}{\delta} \int_0^s \bar{Y} (x - x_s) ds ;$$

ou ainda, dado o fato do carregamento ser uniformemente distribuído ao longo do bordo superior, admite-se que:

$$z = - p/\delta \int_0^s (x - x_s) ds \quad (4.3)$$

O fato do contorno ser retilíneo possibilitará a integração imediata de (4.3).

$$z = - \frac{p}{\delta} \frac{x_s^2}{2} ; \quad (4.4)$$

como  $p/\delta = P_0 = 1$ , definido na seção 4.1 deste Capítulo, a expressão (4.4) resultará:

$$z_s = - \frac{x_s^2}{2} \quad (4.5)$$

A variável  $x_s$  assumirá os valores (0, B, 2B, 3B, 4B), no contorno superior da Figura (4.4). Em consonância com isto, a expressão (4.5) assumirá os valores:

$$z_0 = 0 ; \quad z_I = -\frac{B^2}{2} ; \quad z_{II} = -2B^2 ; \quad z_{III} = -\frac{9B^2}{2} ;$$

$$z_{IV} = -8B^2 ; \quad \text{observando que } B = 2h\cos\alpha$$

$$z_s = -n_i^2 \frac{B^2}{2} , \quad \text{sendo que } n_i \text{ varia de } (0, 1, 2, \dots, n_E), \text{ onde } n_E$$

é o último ponto do bordo superior.

$$z_s = -n_i^2 \frac{B^2}{2} \quad 0 \leq n_i \leq n_E \quad (4.6)$$

No contorno inclinado, a consideração será um pouco diferente. Para a Placa 1, o momento diminuirá, uma vez que a distância ao ponto de aplicação da resultante das forças de contorno diminui. Para a placa 2 se dará o inverso.

No contorno inclinado a função  $z$  assumirá os seguintes valores:

$$z_s = -n_E \frac{B^2}{2} + n_j n_E B \frac{B}{2} \quad (\text{Placa 1}) \quad (4.7)$$

$$z_s = - n_E \frac{B^2}{2} - n_j n_E B \frac{B}{2} \quad (\text{Placa 2}) \quad (4.8)$$

$0 \leq n_j \leq n_L$  ;  $n_j (0, 1, 2, 3 \dots n_L)$  ; para todo  $n_i > n_E$  ; sendo  $n_L$  o último ponto do contorno, percorrendo-o no sentido arbitrado;  $n_i$  será computado desde a origem até  $n_E$ , que é o último ponto do bordo superior;  $n_j$  é computado do último ponto do bordo superior até o último ponto do contorno inclinado.

#### 4.4 - Pontos Externos

Na geração das equações, quando da aplicação da molécula geradora aos pontos internos adjacentes ao contorno, nota-se a necessidade de definir alguns pontos fora do contorno, portanto externos, também chamados fictícios.

Será necessário estabelecer uma ligação entre estes pontos externos e os demais pontos do sistema, por exemplo os internos. Isto será possível através das fórmulas (1.24) e (1.25).

A correspondência evidenciada nas fórmulas citadas no parágrafo anterior, vale tanto para os pontos simplesmente externos, quanto para os dupla ou mais vezes externos, desde que se tome o ponto interno simétrico, em relação ao contorno.

A seguir descreve-se, em ordem cronológica ,

as diversas tentativas para estabelecer uma ligação racional entre os pontos externos, portanto fictícios, e os internos.

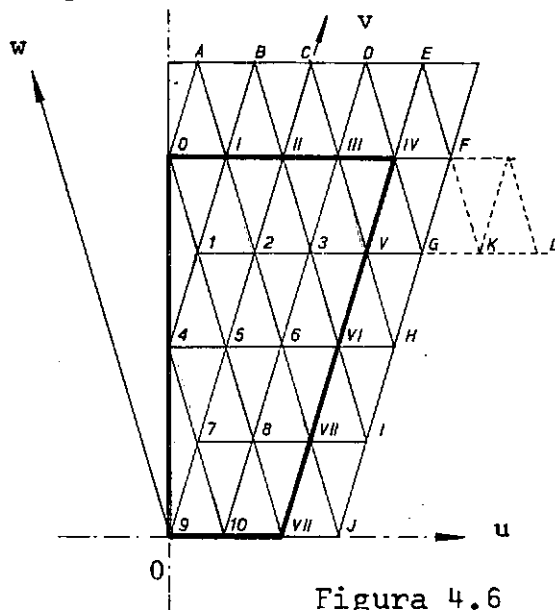


Figura 4.6

A primeira tentativa foi a de estabelecer uma fórmula exata para a derivada em relação à normal, em função de dois dos eixos ( $Ou$ ,  $Ov$ ,  $Ow$ ).

Seja por imperfeição do método, seja por erro na determinação exata da derivada em relação à normal, ou por ambos os fatores, constatou-se não ser exequível o problema por este caminho.

Posteriormente se procurou fazer uma interpolação linear (Figura 4.6) entre  $r$  e  $s$ , com os pontos da malha  $i$  imediatamente acima e abaixo. Igualmente, para esta tentativa, não se chegou a resultados razoáveis. Neste caso, poder-se-ia alegar, além dos dois fatores anteriores, o fato da variação entre 3 e III não ser linear e com isto, introduzir um erro a

precíavel.

Como o esforço tangente, no contorno inclinado, é constante, a derivada em relação à normal também o será, de acordo com (1.25). A terceira tentativa possibilitava uma simplificação, pois, apenas uma interpolação era necessária, a do ponto m (Figura 4.6). Novamente os resultados obtidos não foram satisfatórios.

Imaginando ser a adoção da hipótese da variação linear, quando sabe-se que de fato ela não o é, a responsável pelos insucessos, resolveu-se adotar a fórmula (1.24).

A interpretação mais simples da fórmula (1.24) foi a que levou aos resultados satisfatórios.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - F_y ; \frac{\partial z}{\partial y} = F_x \quad (1.24)$$

por (2.3), ter-se-á:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - P_0 \frac{b}{2} ; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \left( \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w} \right)$$

$F_y = - P_0 \frac{b}{2}$  e  $F_x = 0$ , ao longo de todo o contorno inclinado. Do exposto conclui-se que:  $F_T$  será constante ao longo do citado contorno. Substituindo a derivada pela diferença finita, de acordo (2.23).

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{1}{4h \cos \alpha} \left[ z_{\text{ext}} - z_{\text{int}} \right] = - p_0 \frac{b}{2} \quad (4.9)$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{1}{\text{sena}} \left[ \frac{\Delta z}{\Delta v} + \frac{\Delta z}{\Delta w} \right]$$

Apenas para exemplificar, na Placa da Figura - 4.6, a expressão de  $z_G$  será:

$$z_G = z_3 - 4B.2B = z_3 - 8B^2$$

G é um ponto simplesmente externo.

$$z_K = z_2 - 16B^2$$

K é um ponto duplamente externo.

$$z_L = z_1 - 4B.6B = z_1 - 24B^2$$

L é um ponto triplamente externo.

#### 4.5 - Placas 1 e 2

Placas de forma poligonal, bordos livres, isotropas, homogêneas, espessura constante ao longo do contorno.

Carga uniformemente distribuída total ao longo dos bordos superior e inferior e de intensidade  $p$ , tal que :  
 $p/\delta = P_0 = 1$ .

Devido à simetria, será analisado tão somente o quadrante superior direito.

O carregamento atua no próprio plano da placa e está aquém da carga crítica de flambagem.

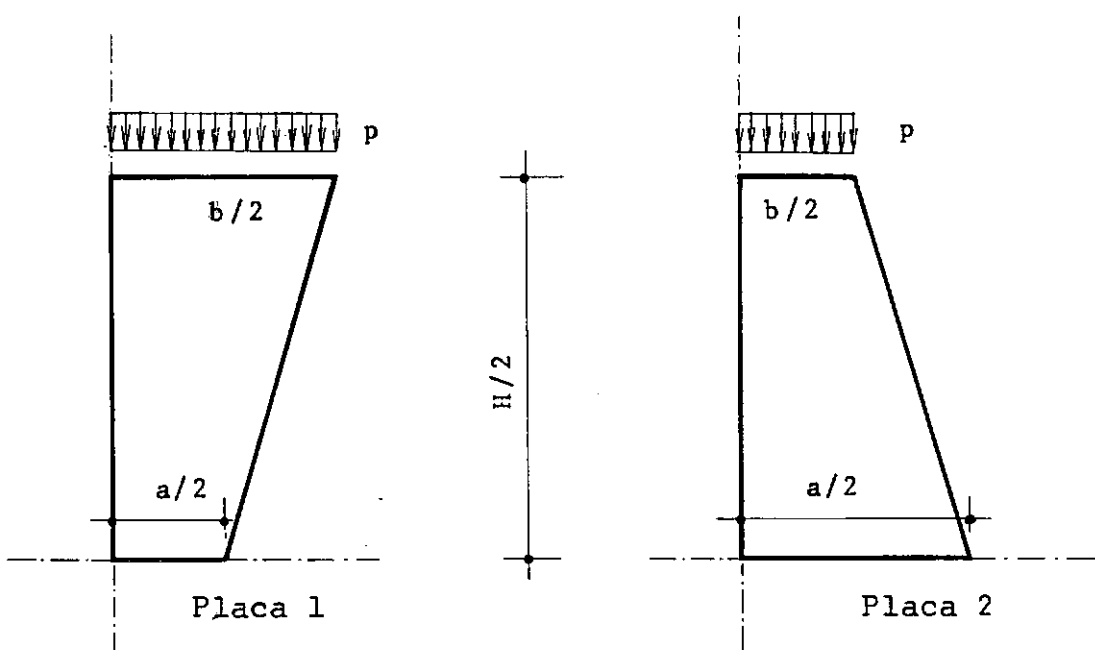


Figura 4.7

Para a geração das equações lineares, aplica-se a molécula geradora específica. A citada molécula é centralizada em cada ponto interno, correspondendo a este ponto o coeficiente central  $K_1$  e aos adjacentes os demais coeficientes da molécula.

O número de equações será, portanto, igual ao número de pontos internos ou nós da malha.

Os cálculos, decorrentes da geração das equações, são trabalhosos e monótonos, por isso mesmo, altamente suscetíveis a erros.

Procurou-se obter a geração das equações através de um programa de computador, denominado de GERSI, o que não é tarefa muito simples, se o fim almejado for uma automatização de fato do problema.

Estes programas são mais ou menos gerais, embora guardem certos aspectos, inerentes ao problema específico.

co.

Uma vez geradas as equações lineares, estas são resolvidas e suas raízes correspondem aos valores dos  $z$  internos (nós da malha).

A solução do sistema linear é tarefa simples, quando se dispõe de computador.

O autor utilizou a subrotina SIMQ, da biblioteca de programas da IBM, apenas introduzindo alguns comandos de entrada e saída, requeridos pelo problema.

Solucionado o sistema, de posse dos valores dos  $z$  internos, calculam-se os externos pela fórmula (4.9) , automatizadas através de um programa de computador.

Com os valores da função  $z$  , nos pontos internos, do contorno e externos, passa-se de imediato ao cálculo das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  e logo a seguir, ao cálculo das tensões principais. (programa TEDIF)

Como se pode observar, toda a sequência do cálculo está automatizada através dos programas elaborados para este fim e mencionados acima.

Por questões inerentes à programação, para a geração das equações lineares se preferiu ortogonalizar a molécula geradora e a malha da Placa, bem como seguir um caminho ditado pela otimização do programa.

A seguir serão representadas as moléculas ortogonalizadas, em coordenadas triangulares e oblíquas.



Coordenadas Triangulares

Coordenadas Obliquas

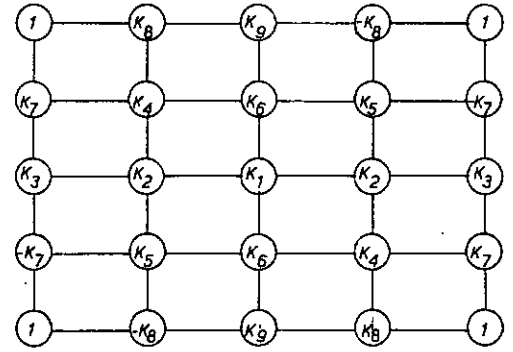
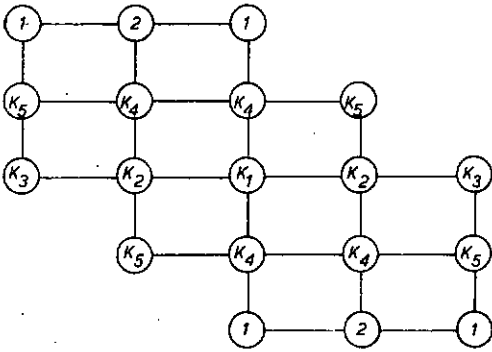


Figura 4.9

4.6 - Placa 1A

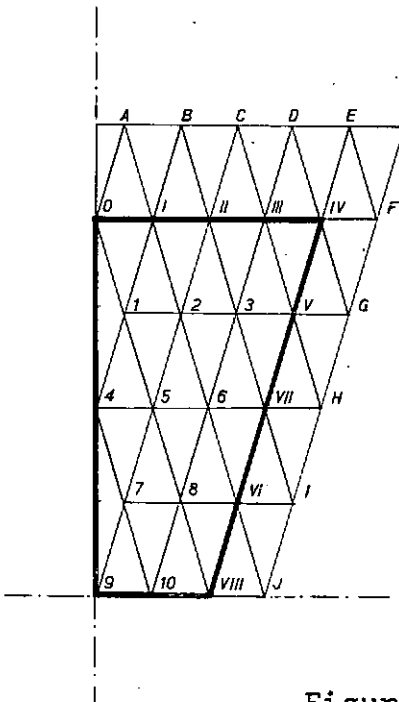


Figura 4.10

Valores específicos:

$$B = 0,75 \quad ; \quad -P_0 \frac{b}{2} = -3,00 \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha = 3,33$$

$$n_E = 4 \quad ; \quad n_L = 4 \quad ; \quad F_y = -P_0 x \quad ;$$

$$(0 \times \frac{b}{2}) \quad \text{para } 0 \leq n_i \leq n_E$$

$$F_y = P_0 \frac{b}{2} \quad \text{para } 0 \leq n_i \leq n_E$$

$$F_x = 0 \quad \text{para todo o contorno}$$

Pontos do contorno:

$$z_0 = 0,000 \quad ; \quad z_I = -0,281 \quad ; \quad z_{II} = -1,125 \quad ; \quad z_{III} = -2,531 \quad ;$$

$$z_{IV} = -4,500 \quad ; \quad z_V = -3,375 \quad ; \quad z_{VI} = -2,250 \quad ; \quad z_{VII} = -1,125 \quad ;$$

$$z_{VIII} = 0,000$$

Pontos externos:

a) Contorno superior

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = 0$$

$$z_A = z_1 \quad ; \quad z_B = z_2 \quad ; \quad z_C = z_3 \quad ; \quad z_D = z_V \quad ; \quad z_E = z_G$$

b) Contorno inclinado

$$z_{EXT} = z_{INT} - P_0 \cdot \frac{b}{2} \cdot 2B = z_{INT} - 4,500$$

$$z_F = -7,03$$

$$z_G = z_3 - 4,500$$

$$z_H = z_6 - 4,500$$

$$z_I = z_8 - 4,500$$

$$z_j = z_{10} - 4,500$$

Multiplicadores das moléculas das tensões

Coordenadas Triangulares

Coordenadas Oblíquas

para  $\sigma_x = 0,16 \times$

$\sigma_x = 0,16 \times$

para  $\sigma_y = 1,78 \times$

$\sigma_y = 1,78 \times$

para  $\tau_{xy} = - 0,55 \times$

$\tau_{xy} = - 0,27 \times$

Ortogonalização da Placa 1A segundo Ov

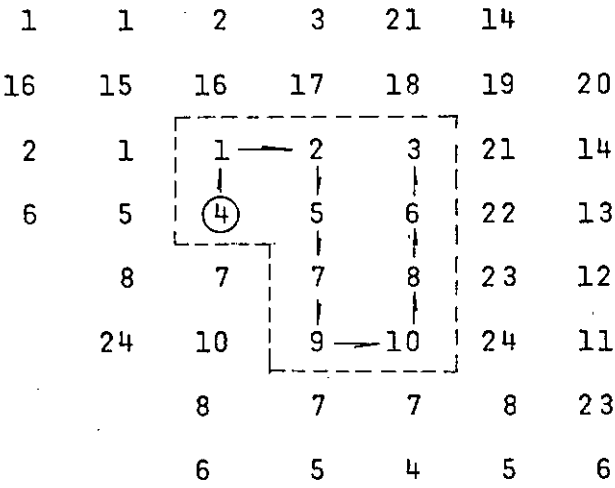


Figura 4.11

A orthogonalização depende em relação a que o eixo inclinado é feita. Poderá ser em relação a Ov, conforme a figura,

ou então,  $Ow$ .

#### 4.7 - Placa 1B

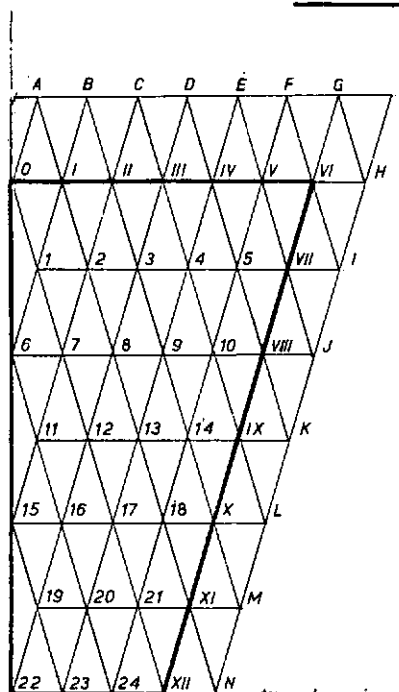


Figura 4.12

Placa 1B e 1C ortogonalizada em relação a  $Ov$

1	1	2	3	4	5	39	30	
33	32	33	34	35	36	37	38	31
2	1	1	2	3	4	5	39	30
8	7	6	7	8	9	10	40	29
13	12	11	11	12	13	14	41	28
18	17	16	15	16	17	18	42	27
43	21	20	19	19	20	21	43	26
25	32	24	23	22	23	24	32	25
	43	21	20	19	19	20	21	43
		18	17	16	15	16	17	18

Figura 4.13

Placa 1B e 1C

Valores específicos:

$$B = 0,500 ; -P_0 \frac{b}{2} = -3,00 ; n_E = 6 ; n_L = 6$$

$$F_y = -P_0 x ; (0 \leq x \leq \frac{b}{2}) ; \text{ para } 0 \leq n_i \leq n_E$$

$$F_y = -P_0 \frac{b}{2} ; \text{ para } n_i > n_E$$

$$F_x = 0 \quad \text{para todo o contorno}$$

$$B = 0,500 ; K = 1,74 ; K = 1,00$$

Pontos do contorno:

$$\begin{aligned} z_0 &= 0,000 ; z_I = -0,125 ; z_{II} = -0,500 ; z_{III} = -1,125 ; \\ z_{IV} &= -2,000 ; z_V = -3,125 ; z_{VI} = -4,500 ; z_{VII} = -3,750 ; \\ z_{VIII} &= -3,000 ; z_{IX} = -2,250 ; z_X = -1,500 ; z_{XI} = -0,750 ; \\ z_{XII} &= 0,000 \end{aligned}$$

Pontos externos:

$$\begin{aligned} z_A &= z_1 ; z_B = z_2 ; z_C = z_3 ; z_D = z_4 ; z_E = z_{VII} ; z_G = z_I \\ z_H &= -6,125 ; z_{\dot{I}} = z_5 - 3,000 ; z_j = z_{10} - 3,000 ; z_K = z_{14} - 3,000 \\ z_L &= z_{18} - 3,000 ; z_M = z_{21} - 3,000 ; z_N = z_{24} - 3,000 \end{aligned}$$

Multiplicadores das tensões P1B e P2A

Coordenadas Triangulares

Coordenadas Oblíquas

$$\text{para } \sigma_x = 0,36 x$$

$$\sigma_x = 0,36 x$$

$$\text{para } \sigma_y = 4,00 x$$

$$\sigma_y = 4,00 x$$

$$\text{para } \tau_{xy} = -1,20 x$$

$$\tau_{xy} = -0,60 x$$

## Placas P-2B e P-1C

Coordenadas Triangulares

$$\sigma_x = 1,33 x$$

$$\sigma_y = 4,00 x$$

$$\tau_{xy} = - 2,31 x$$

Coordenadas Oblíquas

$$\sigma_x = 1,33 x$$

$$\sigma_y = 4,00 x$$

$$\tau_{xy} = - 0,87 x$$

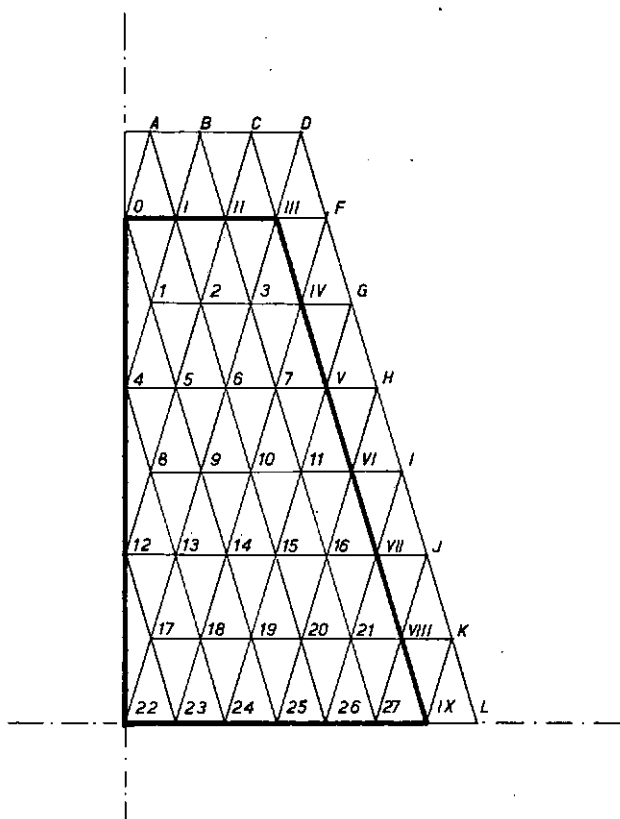
4.8 - Placa 2A

Figura 4.14

Placa 2A e 2B ortogonalizada em relação 0w

			3	2	1	1	2	3	39	
		37	36	35	34	35	36	37	38	
		3	2	1	1	2	3	39	33	
7	6	5	4	5	6	7	40	32		
10	9	8	8	9	10	11	41	31		
15	14	13	12	13	14	15	16	42	30	
19	18	17	17	18	19	20	21	43	29	
24	23	22	23	24	25	26	27	44	28	
18	17	17	18	19	20	21	43	29	45	
13	12	13	14	15	16	42	30	46	47	

Figura 4.15

Valores específicos:

$$B = 0,500 ; K = 1,74 ; -P_0 \frac{b}{2} = -1,50 ; n_E = 3 ;$$

$$n_L = 6 ; K = 1,00$$

$$F_y = -P_0 x ; (0 \leq x \leq \frac{b}{2}) ; \text{ para } 0 \leq n_i \leq n_E$$

$$F_y = -P_0 \frac{b}{2} ; \text{ para } n_i > n_E$$

$$F_x = 0 \text{ ao longo de todo o contorno}$$

Pontos do contorno:

$$z_0 = 0,000 ; z_I = -0,125 ; z_{II} = -0,500 ; z_{III} = -1,125 ;$$

$$z_{IV} = -1,500 ; z_V = -1,875 ; z_{VI} = -2,250 ; z_{VII} = -2,625 ;$$

$$z_{VIII} = -3,000 ; z_{IX} = -3,375$$

Pontos externos:

$$z_A = z_1; z_B = z_2; z_C = z_3; z_D = z_{IV}$$

$$z_F = -2,000; z_G = z_3 - 1,500; z_H = z_7 - 1,500$$

$$z_I = z_{11} - 1,500; z_j = z_{16} - 1,500$$

$$z_K = z_{21} - 1,500; z_L = z_{27} - 1,500$$

### Tabelas

- 4.1 - Tensões na Placa 1A, obtidas por Diferenças Finitas em coordenadas triangulares.
- 4.2 - Tensões na Placa 1A, obtidas por Diferenças Finitas em coordenadas oblíquas.
- 4.3 - Funções  $z$  na Placa 1B, obtidas por Diferenças Finitas, em coordenadas triangulares.
- 4.4 - Tensões na Placa 1B, obtidas por Diferenças Finitas em coordenadas triangulares.
- 4.5 - Funções  $z$  na Placa 2A, obtidas por Diferenças Finitas em coordenadas oblíquas.
- 4.6 - Tensões na Placa 2A, obtidas por Diferenças Finitas em coordenadas oblíquas.
- 4.7 - Tensões na Placa 1C, obtidas por Diferenças Finitas em coordenadas triangulares.
- 4.8 - Tensões na Placa 2B, obtidas por Diferenças Finitas em coordenadas oblíquas.



## Placa 1A - Coordenadas Triangulares

PONTO	SIGX	SIGY	SIGXY
0	0.57	-1.00	0.00
I	0.53	-1.00	0.00
II	0.41	-1.00	0.00
III	0.21	-1.00	0.00
IV	-0.14	-0.98	0.00
1	0.12	-1.10	-0.05
2	0.08	-1.11	-0.15
3	0.00	-1.13	-0.25
V	-0.09	-1.29	-0.35
4	-0.05	-1.33	0.00
5	-0.06	-1.33	-0.15
6	-0.09	-1.33	-0.31
VI	-0.13	-1.33	-0.43
7	-0.15	-1.59	-0.05
8	-0.12	-1.63	-0.22
VII	-0.20	-1.54	-0.59
9	-0.40	-1.71	0.00
10	-0.34	-1.88	-0.00
VIII	-0.05	-2.52	0.00

Tabela 4.1

## Placa 1A - Coordenadas Obliquis

PONTO	SIGX	SIGY	SIGXY
0	0.54	-1.00	-0.03
I	0.55	-1.00	0.03
II	0.43	-1.00	0.03
III	0.25	-1.00	0.06
1	0.13	-1.10	-0.03
2	0.08	-1.11	-0.13
3	0.00	-1.13	-0.23
V	-0.11	-1.29	-0.38
4	-0.05	-1.33	0.18
5	-0.05	-1.33	-0.13
6	-0.08	-1.33	-0.28
VI	-0.11	-1.33	-0.39
7	-0.16	-1.59	-0.07
8	-0.12	-1.63	-0.23
VII	-0.13	-1.54	-0.46
9	-0.31	-1.71	0.14
10	-0.39	-1.88	-0.07
VIII	-0.22	-2.52	-0.28

Tabela 4.2

## MATRIZ DOS COEFICIENTES

-36.222	20.222	0.000	0.000	0.000	254.241	-281.358	51.117
0.000	0.000	-36.222	20.222	0.000	0.000	2.000	2.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
116.562	-114.120	25.559	0.000	0.000	-18.111	-8.000	10.111
0.000	0.000	3.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-114.120	256.241	-139.679	25.559	0.000	10.111	-18.111	-18.111
10.111	0.000	1.000	2.000	1.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-8.000	-18.111	10.111	0.000	0.000	-140.679	279.799	-140.679
25.559	0.000	-8.000	-18.111	10.111	0.000	1.000	2.000
1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.000	1.000	0.000	0.000	0.000	-18.111	-8.000	10.111
0.000	0.000	113.562	-115.120	25.559	0.000	-18.111	-8.000
10.111	0.000	3.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.000	2.000	0.000
0.000	0.000	-36.222	20.222	0.000	0.000	254.241	-281.358
51.117	0.000	-36.222	20.222	0.000	2.000	2.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	4.000	4.000
0.000	0.000	-72.444	40.444	0.000	254.241	-281.358	51.117
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	3.000	1.000	0.000	0.000	-18.111	-8.000
10.111	0.000	116.562	-114.120	25.559	-18.111	-8.000	10.111
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	2.000	1.000
0.000	0.000	-8.000	-18.111	10.111	0.000	-140.679	279.799
-140.679	25.559	-8.000	-18.111	10.111	1.000	2.000	1.000
1.000	2.000	1.000	0.000	0.000	10.111	-18.111	-18.111
10.111	0.000	-115.120	254.241	-140.679	25.559	10.111	-18.111
-18.111	10.111	1.000	2.000	1.000	0.000	0.000	0.000
10.111	-18.111	-18.111	10.111	0.000	25.559	-140.679	254.241
-140.679	25.559	10.111	-18.111	-18.111	10.111	0.000	1.000
2.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25.559	-139.679	256.241	-139.679	25.559	0.000	10.111	-18.111
-18.111	10.111	0.000	1.000	2.000	1.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	25.559	-139.679	256.241	-139.679	0.000	0.000	10.111
-18.111	-18.111	0.000	0.000	1.000	2.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	10.111	-18.111	-18.111	10.111	0.000	25.559	-140.679
254.241	-140.679	0.000	10.111	-18.111	-18.111	0.000	0.000
1.000	2.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1.000	2.000	1.000	0.000	0.000	10.111	-18.111
-18.111	10.111	25.559	-140.679	254.241	-140.679	0.000	10.111
-18.111	-18.111	0.000	1.000	2.000	0.000	0.000	0.000

0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	2.000
1.000	0.000	10.111	-18.111	-18.111	10.111	25.559	-140.679
254.241	-140.679	10.111	-18.111	-18.111	0.000	1.000	2.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	1.000	2.000	1.000	0.000	10.111	-18.111
-18.111	10.111	-114.120	256.241	-139.679	10.111	-18.111	-18.111
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.000	4.000
2.000	0.000	-16.000	-36.222	20.222	-140.679	279.799	-140.679
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.000
4.000	2.000	20.222	-36.222	-36.222	25.559	-140.679	279.799
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	1.000	2.000	1.000	0.000	10.111
-18.111	-18.111	25.559	-139.679	281.799	0.000	10.111	-8.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
2.000	1.000	0.000	10.111	-18.111	-18.111	0.000	25.559
-140.679	279.799	0.000	10.111	-8.000	0.000	0.000	2.000
0.000	0.000	1.000	2.000	1.000	0.000	0.000	10.111
-18.111	-18.111	0.000	25.559	-140.679	279.799	0.000	0.000
10.111	-8.000	0.000	0.000	2.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	10.111	-18.111	-18.111	0.000	0.000	25.559
-140.679	279.799	0.000	0.000	10.111	-8.000	0.000	0.000
0.000	2.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	25.559	-139.679	281.799	0.000	0.000	0.000
10.111	-8.000	0.000	0.000	0.000	2.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

## VETOR CONSTANTE

0.25	4.05	0.05	0.75	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	2.25	-7.94	108.48	105.67	73.42	45.92
19.16	0.00	91.84	17.41	-91.84	-201.85	-303.61	-499.56

## RAIZES DO SISTEMA

0.19	-0.05	-0.57	-1.36	-2.41	0.65	0.51	0.07
-0.64	-1.66	1.07	0.74	0.07	-0.91	1.53	1.34
0.77	-0.17	1.80	1.39	0.54	1.99	1.78	1.14

## FUNCOES NA PLACA

0.19	0.19	-0.05	-0.57	-1.36	-2.41	-3.75	-5.41
------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

-0.12	0.00	-0.12	-0.50	-1.12	-2.00	-3.12	-4.50	-6.12
-0.05	0.19	0.19	-0.05	-0.57	-1.36	-2.41	-3.75	-5.41
0.07	0.51	0.65	0.51	0.07	-0.64	-1.66	-3.00	-4.66
0.07	0.74	1.07	1.07	0.74	0.07	-0.91	-2.25	-3.91
-0.17	0.77	1.34	1.53	1.34	0.77	-0.17	-1.50	-3.17
-0.75	0.54	1.39	1.80	1.80	1.39	0.54	-0.75	-2.45
-1.85	0.00	1.14	1.78	1.99	1.78	1.14	0.00	-1.85
-0.75	0.54	1.39	1.80	1.80	1.39	0.54	-0.75	

Tabela 4.3

## PLACA COM 24 PONTOS - TRIANG. 60 GRAUS

PONTO	SIGX	SIGY	SIGXY	SIG1	SIG2	ALFA
FII I	0.65 I	-1.00 I	-0.00 I	0.65 I	-1.00 I	-0.00
II I	0.60 I	-1.00 I	0.00 I	0.60 I	-1.00 I	0.00
III I	0.53 I	-1.00 I	0.00 I	0.53 I	-1.00 I	0.00
IV I	0.41 I	-1.00 I	0.00 I	0.41 I	-1.00 I	0.00
V I	0.21 I	-1.00 I	0.00 I	0.21 I	-1.00 I	0.00
VI I	-0.14 I	-1.00 I	0.00 I	-0.14 I	-1.00 I	0.00
1 I	0.27 I	-1.03 I	-0.02 I	0.27 I	-1.03 I	-0.01
2 I	0.24 I	-1.04 I	-0.07 I	0.24 I	-1.04 I	-0.05
3 I	0.18 I	-1.04 I	-0.12 I	0.19 I	-1.06 I	-0.09
4 I	0.10 I	-1.07 I	-0.17 I	0.12 I	-1.10 I	-0.14
5 I	0.00 I	-1.14 I	-0.24 I	0.05 I	-1.19 I	-0.20
VII I	-0.09 I	-1.30 I	-0.35 I	0.00 I	-1.39 I	-0.26
6 I	0.04 I	-1.15 I	0.00 I	0.04 I	-1.15 I	0.00
7 I	0.03 I	-1.15 I	-0.08 I	0.04 I	-1.16 I	-0.07
8 I	0.01 I	-1.16 I	-0.17 I	0.03 I	-1.19 I	-0.14
9 I	-0.03 I	-1.18 I	-0.25 I	0.02 I	-1.24 I	-0.21
10 I	-0.08 I	-1.23 I	-0.33 I	0.00 I	-1.32 I	-0.26
VIII I	-0.11 I	-1.34 I	-0.39 I	0.00 I	-1.46 I	-0.28
11 I	-0.06 I	-1.32 I	-0.05 I	-0.06 I	-1.33 I	-0.04
12 I	-0.06 I	-1.33 I	-0.16 I	-0.04 I	-1.35 I	-0.12
13 I	-0.08 I	-1.33 I	-0.27 I	-0.02 I	-1.38 I	-0.20
14 I	-0.10 I	-1.33 I	-0.36 I	-0.00 I	-1.43 I	-0.26

IX I	-0.12 I	-1.34 I	-0.41 I	0.00 I	-1.47 I	-0.29
15 I	-0.13 I	-1.51 I	0.00 I	-0.13 I	-1.51 I	0.00
16 I	-0.12 I	-1.52 I	-0.09 I	-0.12 I	-1.52 I	-0.06
17 I	-0.11 I	-1.53 I	-0.21 I	-0.08 I	-1.56 I	-0.14
18 I	-0.11 I	-1.49 I	-0.35 I	-0.02 I	-1.58 I	-0.23
X I	-0.14 I	-1.39 I	-0.44 I	0.00 I	-1.53 I	-0.31
19 I	-0.25 I	-1.65 I	-0.02 I	-0.25 I	-1.65 I	-0.01
20 I	-0.21 I	-1.72 I	-0.08 I	-0.20 I	-1.72 I	-0.05
21 I	-0.15 I	-1.80 I	-0.23 I	-0.12 I	-1.83 I	-0.13
XI I	-0.23 I	-1.62 I	-0.63 I	0.01 I	-1.87 I	-0.36
22 I	-0.39 I	-1.66 I	0.00 I	-0.39 I	-1.66 I	0.00
23 I	-0.38 I	-1.73 I	0.00 I	-0.38 I	-1.73 I	0.00
24 I	-0.32 I	-2.01 I	0.00 I	-0.32 I	-2.01 I	0.00
XII I	-0.03 I	-2.83 I	0.00 I	-0.03 I	-2.83 I	0.00

Tabela 4.4

## MATRIZ DOS COEFICIENTES

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	16.00	30.00	-16.00	2.00	0.00	-450.65	371.09
-48.44	0.00	0.00	1367.50	-1560.82	289.32	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	15.00	8.00	16.00	-8.00	1.00	-39.77	-249.54
185.54	-24.22	0.00	-780.41	1512.16	-780.41	144.66	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	22.00	-7.00
1.00	0.00	-257.76	193.76	0.00	0.00	0.00	596.09	-621.75
136.66	1.00	0.00	32.44	-233.54	161.32	-24.22	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	8.00	15.00	-8.00	1.00	-225.32	185.54
-24.22	0.00	1367.50	-1560.82	289.32	0.00	0.00	-225.32	185.54
-24.22	0.00	0.00	8.00	15.00	-8.00	1.00	0.00	0.00
-225.32	185.54	-24.22	1367.50	-1560.82	289.32	0.00	-225.32	185.54
-24.22	0.00	8.00	15.00	-8.00	1.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
22.00	-7.00	1.00	-257.76	193.76	0.00	0.00	587.09	-635.75
144.66	0.00	32.44	-233.54	161.32	-24.22	0.00	9.00	14.00
-8.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	14.00	0.00	2.00	0.00	-96.44	8.22
24.22	0.00	-780.41	1512.16	-780.41	144.66	0.00	56.66	-257.76
161.32	-24.22	0.00	1.00	8.00	14.00	-8.00	1.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.00	9.00
1.00	0.00	161.32	-281.98	32.44	24.22	0.00	-634.75	1375.50
-766.41	136.66	1.00	24.22	32.44	-257.76	161.32	-24.22	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-8.00	16.00	16.00	15.00	-8.00	161.32	-225.32
-225.32	185.54	-24.22	144.66	-780.41	1367.50	-780.41	144.66	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	1.00	-8.00	15.00	16.00	16.00	-24.22	185.54
-225.32	-225.32	185.54	0.00	144.66	-780.41	1367.50	-780.41	144.66
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-7.00	14.00
8.00	1.00	-24.22	161.32	-257.76	32.44	24.22	144.66	-779.41
1375.50	-766.41	136.66	0.00	24.22	32.44	-257.76	161.32	-24.22
0.00	0.00	0.00	-8.00	15.00	8.00	1.00	137.10	-257.76
32.44	24.22	144.66	-780.41	1367.50	-780.41	144.66	24.22	32.44
-257.76	161.32	-24.22	0.00	1.00	8.00	14.00	-8.00	1.00
6.00	9.00	1.00	161.32	-281.98	32.44	24.22	-635.75	1367.50
-780.41	144.66	24.22	32.44	-257.76	161.32	-24.22	1.00	8.00
14.00	-8.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-96.44	8.22	24.22	-780.41	1512.16	-780.41	144.66	56.66	-257.76
161.32	-24.22	1.00	8.00	14.00	-8.00	1.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
609.09	-642.75	145.66	32.44	-233.54	161.32	-24.22	9.00	14.00
-8.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-629.75	1376.50	-779.41	24.22	32.44	-257.76	161.32	1.00	8.00



14.00	-8.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
137.10	-257.76	32.44	144.66	-780.41	1367.50	-780.41	24.22	32.44
-257.76	161.32	0.00	1.00	8.00	14.00	-8.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-7.00	14.00	8.00	-24.22	161.32	-257.76	32.44	144.66	-780.41
1367.50	-780.41	0.00	24.22	32.44	-257.76	161.32	0.00	1.00
8.00	14.00	-8.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	1.00	-8.00	14.00	8.00	-24.22	161.32
-257.76	32.44	0.00	144.66	-780.41	1367.50	-780.41	0.00	24.22
32.44	-257.76	161.32	0.00	0.00	1.00	8.00	14.00	-8.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-8.00
14.00	8.00	0.00	-24.22	161.32	-257.76	32.44	0.00	144.66
-779.41	1375.50	-765.41	0.00	0.00	24.22	32.44	-257.76	161.32
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	1.00	-8.00	16.00	8.00	0.00	-24.22
185.54	-225.32	-249.54	0.00	0.00	144.66	-780.41	1367.50	-780.41
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	2.00	-16.00	30.00	0.00	0.00
-24.22	161.32	-39.77	0.00	0.00	0.00	144.66	-780.41	1512.16
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
-8.00	15.00	0.00	0.00	-24.22	161.32	-233.54	0.00	0.00
144.66	-778.41	1512.16	0.00	0.00	0.00	24.22	32.44	-281.98
0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-8.00	15.00	0.00	-24.22
161.32	-233.54	0.00	0.00	144.66	-780.41	1512.16	0.00	0.00
24.22	32.44	-281.98	0.00	0.00	0.00	1.00	8.00	15.00
1.00	-8.00	15.00	0.00	-24.22	161.32	-233.54	0.00	144.66
-780.41	1512.16	0.00	0.00	24.22	32.44	-281.98	0.00	0.00
1.00	8.00	15.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-24.22	161.32	-233.54	0.00	144.66	-780.41	1512.16	0.00	24.22
32.44	-281.98	0.00	0.00	1.00	8.00	15.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
137.66	-766.41	1520.16	0.00	24.22	32.44	-281.98	0.00	1.00
8.00	15.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

## VETOR CONSTANTE

0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	2.62
-92.16	3.00	0.00	0.00	1.00	24.22	182.04	262.70	311.82
366.82	395.56	1038.91	-2842.22	-1442.11	-1283.62	-1063.63	-837.13	-726.25

## RAIZES DO SISTEMA

-0.14	-0.37	-0.83	-0.29	-0.39	-0.70	-1.20	-0.49	-0.67
-1.03	-1.56	-0.62	-0.70	-0.95	-1.37	-1.93	-0.74	-0.90
-1.22	-1.69	-2.29	-0.76	-0.84	-1.08	-1.47	-2.00	-2.64

## FUNCOES NA PLACA

-0.37	-0.14	-0.14	-0.37	-0.83	-1.50	-2.33		
-0.12	0.00	-0.12	-0.50	-1.12	-2.00	0.00		
-0.37	-0.14	-0.14	-0.37	-0.83	-1.50	-2.33		
-0.39	-0.29	-0.39	-0.70	-1.20	-1.87	-2.70		
-0.67	-0.49	-0.49	-0.67	-1.03	-1.56	-2.25	-3.06	
-0.70	-0.62	-0.70	-0.95	-1.37	-1.93	-2.62	-3.43	
-0.90	-0.74	-0.74	-0.90	-1.22	-1.69	-2.29	-3.00	-3.79
-0.84	-0.76	-0.84	-1.08	-1.47	-2.00	-2.64	-3.37	-4.14
-0.74	-0.74	-0.90	-1.22	-1.69	-2.29	-3.00	-3.79	-4.69

Tabela 4.5

## PLACA COM 27 PONTOS - COORD. OBLIQUAS

PONTO	SIGX	SIGY	SIGXY	SIG1	SIG2	ALF
FO	-0.33	-1.00	0.02	-0.33	-1.00	1.82
I	-0.31	-1.00	0.02	-0.31	-1.00	2.12
II	-0.24	-1.00	0.04	-0.23	-1.00	3.04
III	-0.07	-1.00	0.07	-0.07	-1.00	4.52
1	-0.08	-0.93	0.03	-0.08	-0.93	2.22
2	-0.07	-0.90	0.08	-0.06	-0.90	5.92
3	-0.05	-0.82	0.14	-0.03	-0.85	10.32
IV	-0.06	-0.68	0.20	0.00	-0.74	16.69
4	-0.00	-0.82	-0.00	-0.00	-0.82	-0.12
5	-0.00	-0.81	0.05	-0.00	-0.81	3.90
6	-0.01	-0.76	0.10	0.00	-0.78	8.08
7	-0.03	-0.69	0.15	0.00	-0.73	12.58
V	-0.05	-0.61	0.18	0.00	-0.66	16.69
8	0.03	-0.73	0.01	0.03	-0.73	1.33
9	0.02	-0.71	0.06	0.03	-0.71	4.63
10	0.00	-0.66	0.09	0.02	-0.68	8.23
11	-0.02	-0.60	0.13	0.00	-0.63	12.27
VI	-0.04	-0.54	0.16	0.00	-0.59	16.69
12	0.06	-0.68	-0.00	0.06	-0.68	-0.26
13	0.06	-0.67	0.02	0.06	-0.67	1.76
14	0.04	-0.63	0.04	0.05	-0.64	3.96
15	0.02	-0.59	0.07	0.03	-0.59	6.70

16	I	-0.00	I	-0.52	I	0.10	I	0.01	I	-0.54	I	10.59
VII	I	-0.04	I	-0.46	I	0.13	I	0.00	I	-0.50	I	16.69
17	I	0.09	I	-0.65	I	0.00	I	0.09	I	-0.65	I	0.23
18	I	0.08	I	-0.62	I	0.01	I	0.08	I	-0.62	I	1.11
19	I	0.07	I	-0.58	I	0.02	I	0.07	I	-0.58	I	2.18
20	I	0.04	I	-0.52	I	0.03	I	0.04	I	-0.52	I	3.79
21	I	0.01	I	-0.43	I	0.05	I	0.02	I	-0.44	I	7.30
VIII	I	-0.03	I	-0.33	I	0.10	I	0.00	I	-0.36	I	16.69
22	I	0.10	I	-0.64	I	-0.00	I	0.10	I	-0.64	I	-0.12
23	I	0.10	I	-0.63	I	-0.00	I	0.10	I	-0.63	I	-0.09
24	I	0.09	I	-0.60	I	-0.00	I	0.09	I	-0.60	I	-0.11
25	I	0.08	I	-0.54	I	-0.00	I	0.08	I	-0.55	I	-0.16
26	I	0.06	I	-0.46	I	-0.00	I	0.06	I	-0.46	I	-0.47
27	I	0.03	I	-0.34	I	-0.01	I	0.03	I	-0.34	I	-2.18
IX	I	-0.00	I	-0.16	I	-0.06	I	0.02	I	-0.18	I	-20.48

Tabela 4.6

## PLACA COM 24 PONTOS - TRIANG. 60 GRAUS

PONTO	SIGX	SIGY	SIGXY	SIG1	SIG2	ALFA
FII I	1.59 I	-1.00 I	0.00 I	1.59 I	-1.00 I	0.00
II I	1.55 I	-1.00 I	0.00 I	1.55 I	-0.99 I	0.00
III I	1.43 I	-1.00 I	0.00 I	1.43 I	-1.00 I	0.00
IV I	1.19 I	-1.00 I	0.00 I	1.19 I	-0.99 I	0.00
V I	0.68 I	-1.00 I	0.00 I	0.68 I	-1.00 I	0.00
VI I	-0.64 I	-1.00 I	0.00 I	-0.64 I	-1.00 I	0.00
1 I	0.93 I	-1.00 I	-0.00 I	0.93 I	-1.00 I	-0.00
2 I	0.88 I	-1.02 I	-0.04 I	0.88 I	-1.02 I	-0.02
3 I	0.76 I	-1.03 I	-0.12 I	0.77 I	-1.04 I	-0.06
4 I	0.51 I	-1.05 I	-0.23 I	0.55 I	-1.08 I	-0.14
5 I	0.13 I	-1.14 I	-0.39 I	0.24 I	-1.26 I	-0.27
VII I	-0.38 I	-1.46 I	-0.75 I	0.00 I	-1.85 I	-0.47
6 I	0.34 I	-1.03 I	0.00 I	0.34 I	-1.03 I	0.00
7 I	0.32 I	-1.06 I	-0.05 I	0.33 I	-1.06 I	-0.04
8 I	0.26 I	-1.13 I	-0.17 I	0.28 I	-1.15 I	-0.12
9 I	0.09 I	-1.19 I	-0.38 I	0.20 I	-1.29 I	-0.26
10 I	-0.18 I	-1.27 I	-0.61 I	0.09 I	-1.55 I	-0.42
VIII I	-0.48 I	-1.62 I	-0.89 I	0.00 I	-2.11 I	-0.50
11 I	-0.15 I	-1.10 I	-0.02 I	-0.15 I	-1.10 I	-0.02
12 I	-0.15 I	-1.22 I	-0.13 I	-0.14 I	-1.24 I	-0.11
13 I	-0.20 I	-1.39 I	-0.37 I	-0.09 I	-1.50 I	-0.28
14 I	-0.37 I	-1.46 I	-0.73 I	-0.00 I	-1.83 I	-0.46

IX I	-0.54 I	-1.61 I	-0.93 I	0.00 I	-2.16 I	-0.52
15 I	-0.56 I	-1.12 I	0.00 I	-0.56 I	-1.12 I	0.00
16 I	-0.54 I	-1.24 I	-0.04 I	-0.54 I	-1.24 I	-0.06
17 I	-0.49 I	-1.55 I	-0.20 I	-0.45 I	-1.59 I	-0.18
18 I	-0.54 I	-1.81 I	-0.69 I	-0.23 I	-2.12 I	-0.41
X I	-0.71 I	-1.62 I	-1.09 I	0.01 I	-2.35 I	-0.58
19 I	-0.85 I	-1.18 I	-0.00 I	-0.85 I	-1.18 I	-0.01
20 I	-0.80 I	-1.50 I	-0.04 I	-0.80 I	-1.50 I	-0.06
21 I	-0.65 I	-2.22 I	-0.27 I	-0.61 I	-2.27 I	-0.16
XI I	-1.26 I	-2.16 I	-1.71 I	0.06 I	-3.48 I	-0.65
22 I	-0.96 I	-1.14 I	0.00 I	-0.96 I	-1.14 I	0.00
23 I	-0.96 I	-1.31 I	0.00 I	-0.96 I	-1.31 I	0.00
24 I	-0.88 I	-1.94 I	0.00 I	-0.88 I	-1.94 I	0.00
XII I	-0.00 I	-4.32 I	0.00 I	-0.00 I	-4.32 I	0.00

Tabela 4.7

## PLACA COM 27 PONTOS - COORD. OBLIQUAS

PONTO	SIGX	SIGY	SIGXY	SIG1	SIG2	ALF
F0 I	-0.47 I	-1.00 I	0.00 I	-0.47 I	-1.00 I	0.48
I I	-0.46 I	-1.00 I	0.01 I	-0.46 I	-1.00 I	1.36
II I	-0.43 I	-1.00 I	0.04 I	-0.42 I	-1.00 I	4.77
III I	-0.21 I	-1.00 I	0.15 I	-0.18 I	-1.02 I	10.69
1 I	-0.21 I	-0.98 I	0.01 I	-0.21 I	-0.99 I	1.37
2 I	-0.19 I	-0.95 I	0.05 I	-0.19 I	-0.95 I	4.08
3 I	-0.15 I	-0.82 I	0.12 I	-0.12 I	-0.84 I	9.83
IV I	-0.15 I	-0.46 I	0.20 I	-0.05 I	-0.55 I	26.25
4 I	-0.04 I	-0.96 I	0.00 I	-0.04 I	-0.96 I	0.29
5 I	-0.04 I	-0.93 I	0.03 I	-0.04 I	-0.93 I	2.56
6 I	-0.03 I	-0.82 I	0.08 I	-0.02 I	-0.83 I	6.02
7 I	-0.05 I	-0.61 I	0.12 I	-0.02 I	-0.64 I	12.29
V I	-0.09 I	-0.28 I	0.12 I	-0.03 I	-0.34 I	26.25
8 I	0.06 I	-0.91 I	0.01 I	0.06 I	-0.91 I	1.09
9 I	0.05 I	-0.84 I	0.05 I	0.05 I	-0.84 I	3.33
10 I	0.03 I	-0.68 I	0.08 I	0.04 I	-0.69 I	6.58
11 I	-0.01 I	-0.45 I	0.10 I	0.01 I	-0.47 I	12.25
VI I	-0.06 I	-0.19 I	0.08 I	-0.02 I	-0.23 I	26.25
12 I	0.13 I	-0.88 I	0.00 I	0.13 I	-0.88 I	0.05
13 I	0.12 I	-0.85 I	0.02 I	0.12 I	-0.85 I	1.49
14 I	0.10 I	-0.74 I	0.04 I	0.10 I	-0.74 I	3.20
15 I	0.06 I	-0.56 I	0.06 I	0.06 I	-0.57 I	5.71

16 I	0.00 I	-0.33 I	0.06 I	0.01 I	-0.34 I	10.41
VII I	-0.03 I	-0.11 I	0.05 I	-0.01 I	-0.14 I	26.25
17 I	0.16 I	-0.85 I	0.00 I	0.16 I	-0.85 I	0.39
18 I	0.15 I	-0.78 I	0.01 I	0.15 I	-0.78 I	1.13
19 I	0.11 I	-0.64 I	0.02 I	0.11 I	-0.65 I	2.14
20 I	0.06 I	-0.45 I	0.03 I	0.06 I	-0.45 I	3.55
21 I	0.01 I	-0.22 I	0.02 I	0.01 I	-0.22 I	6.68
VIII I	-0.01 I	-0.05 I	0.02 I	-0.00 I	-0.06 I	26.25
22 I	0.18 I	-0.85 I	0.00 I	0.18 I	-0.85 I	0.02
23 I	0.17 I	-0.82 I	0.00 I	0.17 I	-0.82 I	0.05
24 I	0.14 I	-0.72 I	0.00 I	0.14 I	-0.72 I	0.08
25 I	0.10 I	-0.55 I	0.00 I	0.10 I	-0.55 I	0.14
26 I	0.05 I	-0.34 I	0.00 I	0.05 I	-0.34 I	0.39
27 I	0.03 I	-0.11 I	-0.00 I	0.03 I	-0.11 I	-3.65
IX I	0.05 I	-0.01 I	-0.05 I	0.08 I	-0.04 I	-28.86

Tabela 4.8



## CAPÍTULO V - ELEMENTOS FINITOS

### 5.1 - Considerações Gerais

O autor irá se socorrer dos resultados obtidos através dos Elementos Finitos para fins de comparação.

Não há nenhuma pretensão de se estudar a teoria dos Elementos Finitos, dadas as limitações do autor e do propósito deste trabalho.

Tudo o que fôr dito sobre Elementos Finitos, será decorrente da tese de doutoramento do prof. Alcebíades Vasconcellos Filho<sup>9</sup>. Dêste importante trabalho serão extraídos, não só os conceitos emitidos, como também o programa MEFI-1, que permitirá a resolução, através dos Elementos Finitos, dos exemplos resolvidos por Diferenças Finitas.

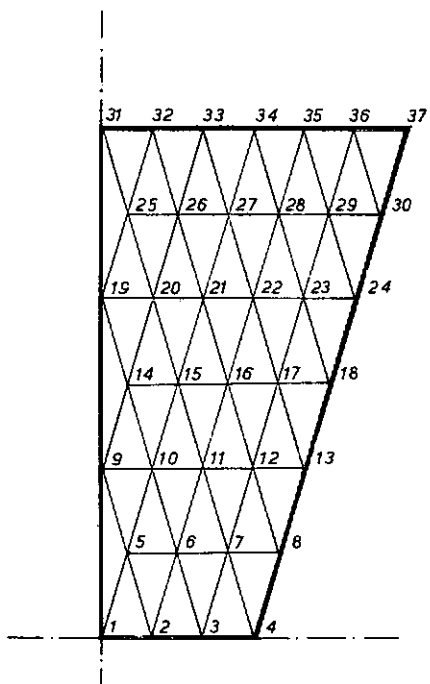
É bom ressaltar que não se deseja comparar o Método dos Elementos Finitos com o das Diferenças e sim o das Diferenças com o dos Elementos. Isto quer dizer que se está aceitando o Método dos Elementos Finitos como padrão.

O que foi dito acima dá a medida exata do que se pretende com o Método dos Elementos Finitos.

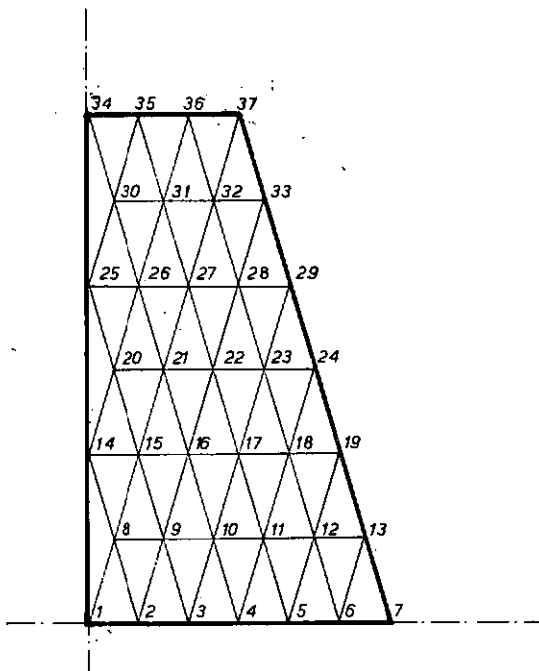
Serão examinadas P-1B e P-2A por Elementos Finitos, através da aplicação do programa MEFI-1<sup>9</sup>.

Posteriormente se examinará P-1 e P-2, através de uma malha bem refinada, quase a máxima capacidade de MEFI-1, podendo-se admitir que os resultados numéricos obtidos estejam bem próximos dos reais.

P - 1B e P - 2A



Placa P-1B



Placa P-2A

Antes de se apresentar o programa com os resultados das tensões nos pontos será preciso fazer algumas considerações:

- 1º - A malha não é muito própria para Elementos Finitos, uma vez que os triângulos têm ângulos muito agudos e um dos lados bem menor que os outros dois. Adotou-se esta malha para se fazer uma comparação efetiva com as Diferenças Finitas, inclusive nos mesmos pontos da placa.
- 2º - O carregamento é considerado como concentrado nos vértices dos triângulos. Este carregamento é obtido, multiplicando-se a carga uniformemente distribuída por sua zona

de influência. Assim sendo, os vértices extremos terão -  
sômente a metade do carregamento.

3º - A vinculação nos eixos de simetria obedece à compatibilidade dos deslocamentos.

### Tabelas

Tabela 5.1 - Tensões de P-1B, calculadas por Elementos Finitos

Tabela 5.2 - Tensões de P-2A, calculadas por Elementos Finitos

Tabela 5.3 - Tensões de P-1 (com 142 pontos no quadrante) calculadas por Elementos Finitos.

Tabela 5.4 - Tensões de P-2 (com 142 pontos no quadrante) calculadas por Elementos Finitos.

Tabela 5.5 - Tensões de P-1C, calculadas por Elementos Finitos

Tabela 5.6 - Tensões de P-2B, calculadas por Elementos Finitos

1	-0.29021	-1.61368	-0.01016	-0.43	-0.29013	-1.61375
2	-0.29283	-1.68019	-0.01221	-0.50	-0.29272	-1.68030
3	-0.24961	-1.85493	-0.03714	-1.32	-0.24875	-1.85579
4	-0.22127	-2.13316	-0.17477	-5.18	-0.20543	-2.14901
5	-0.25326	-1.60956	-0.03276	-1.38	-0.25247	-1.61035
6	-0.22772	-1.67536	-0.08772	-3.45	-0.22242	-1.68066
7	-0.16907	-1.83199	-0.21319	-7.19	-0.14219	-1.85889
8	-0.13101	-1.82207	-0.37830	-12.05	-0.05024	-1.90284
9	-0.16019	-1.46354	-0.03724	-1.63	-0.15912	-1.46460
10	-0.15175	-1.48866	-0.08639	-3.68	-0.14619	-1.49422
11	-0.12721	-1.52520	-0.19806	-7.91	-0.09969	-1.55272
12	-0.09941	-1.51399	-0.33665	-12.72	-0.02338	-1.59002
13	-0.12834	-1.46590	-0.39449	-15.26	-0.02066	-1.57358
14	-0.06452	-1.32461	-0.07045	-3.19	-0.06059	-1.32854
15	-0.06665	-1.33295	-0.15540	-6.89	-0.04785	-1.35174
16	-0.07360	-1.33715	-0.25945	-11.16	-0.02240	-1.38835
17	-0.10046	-1.34021	-0.35215	-14.80	-0.00742	-1.43325
18	-0.12398	-1.34269	-0.39889	-16.60	-0.00503	-1.46164
19	0.07133	-1.19346	-0.03294	-1.49	0.07218	-1.19432
20	0.05756	-1.18204	-0.08150	-3.74	0.06289	-1.18738
21	0.03291	-1.18251	-0.16873	-7.75	0.05591	-1.20531
22	-0.00950	-1.19665	-0.25189	-11.49	0.04173	-1.24788
23	-0.06430	-1.23742	-0.33044	-14.69	0.02237	-1.32416
24	-0.07653	-1.27800	-0.38446	-16.52	0.01755	-1.39209
25	0.00380	-1.06100	-0.02707	-1.13	0.30434	-1.06154
26	0.27208	-1.06776	-0.07115	-3.03	0.27585	-1.07152
27	0.22024	-1.07520	-0.12153	-5.31	0.23155	-1.08650
28	0.14357	-1.09605	-0.17786	-8.00	0.16859	-1.12107
29	0.04460	-1.14586	-0.25043	-11.40	0.09514	-1.19640
30	-0.00374	-1.16933	-0.29193	-13.29	0.06575	-1.23833
31	0.46502	-1.02734	-0.00818	-0.31	0.46507	-1.02738
32	0.51878	-1.00936	-0.02270	-0.85	0.51912	-1.00970
33	0.47544	-1.01122	-0.04964	-1.91	0.47749	-1.01267
34	0.40134	-1.01961	-0.08105	-3.25	0.40595	-1.02422
35	0.29029	-1.04135	-0.12622	-5.36	0.30215	-1.05321
36	0.12893	-1.08738	-0.20422	-9.28	0.16231	-1.12076
37	0.07924	-1.12650	-0.26310	-11.78	0.13415	-1.18141

Tabela 5.1

1	-0.0840	0.1592
2	0.0000	0.3167
3	0.0000	0.3014
4	0.0000	0.2754
5	0.0000	0.2366
6	0.0000	0.1787
7	0.0000	0.0317

TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSÕES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
CARREGAMENTO NO. 1						
1	0.09992	-0.64600	0.00269	0.20	0.09993	-0.64601
2	0.09958	-0.63205	0.00309	0.24	0.09959	-0.63206
3	0.08925	-0.60091	0.00596	0.49	0.08931	-0.60096
4	0.07247	-0.54845	0.00880	0.81	0.07260	-0.54858
5	0.04900	-0.47053	0.01251	1.37	0.04930	-0.47083
6	0.01617	-0.35614	0.02029	3.11	0.01727	-0.35725
7	-0.00309	-0.28780	-0.01027	-2.06	-0.00272	-0.28817
8	0.09283	-0.64610	0.00755	0.58	0.09291	-0.64618
9	0.08499	-0.62830	0.01777	1.42	0.08543	-0.62874
10	0.06934	-0.58737	0.02893	2.51	0.07061	-0.58864
11	0.04696	-0.52565	0.04121	4.09	0.04991	-0.52860
12	0.01753	-0.44089	0.05921	7.24	0.02506	-0.44842
13	0.00019	-0.35724	0.04712	7.38	0.00630	-0.36335
14	0.06801	-0.69254	0.01249	0.94	0.06822	-0.69275
15	0.06491	-0.67507	0.02551	1.97	0.06579	-0.67595
16	0.05021	-0.64086	0.05189	4.27	0.05409	-0.64473
17	0.02714	-0.59034	0.07547	6.86	0.03623	-0.59943
18	-0.00196	-0.52727	0.10071	10.48	0.01668	-0.54592
19	-0.01632	-0.47150	0.10227	12.09	0.00560	-0.49342

// ASM

Tabela 5.2

32	0.2319973	-2.7741793	33	0.3183213	-2.4531614	34	0.0000000	-3.8634732
35	-0.0122736	-3.8152401	36	-0.0015951	-3.6346741	37	0.0596836	-3.2934536

## REAÇÕES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
----	-----	-----	-----

## CARREGAMENTO NO. 1

14	-0.1160	0.0000
25	0.0259	0.0000
34	0.1740	0.0000

## TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSOES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
----	-------	-------	-------	------	------	------

## CARREGAMENTO NO. 1

20	0.03693	-0.73720	0.03085	2.27	0.03816	-0.73843
21	0.02753	-0.71359	0.06621	5.06	0.03340	-0.71946
22	0.00768	-0.66591	0.10343	8.53	0.02321	-0.68144
23	-0.02016	-0.60687	0.13504	12.35	0.00942	-0.63646
24	-0.03394	-0.56014	0.14066	14.06	0.00130	-0.59539
25	-0.01484	-0.82515	0.02316	1.63	-0.01418	-0.82581
26	-0.01213	-0.81081	0.05599	3.99	-0.00822	-0.81472
27	-0.01772	-0.76608	0.11407	8.47	-0.00072	-0.78309
28	-0.03327	-0.69310	0.16095	13.00	0.00389	-0.73027
29	-0.04672	-0.63638	0.16706	14.76	-0.00268	-0.68042
30	-0.12080	-0.91466	0.03394	2.44	-0.11935	-0.91611
31	-0.10033	-0.88945	0.08392	6.00	-0.09150	-0.89827
32	-0.07305	-0.82405	0.15038	10.91	-0.04406	-0.85305
33	-0.05908	-0.74473	0.17785	13.71	-0.01569	-0.78813
34	-0.20372	-0.93927	0.01815	1.41	-0.20327	-0.93972
35	-0.22595	-0.95409	0.04200	3.29	-0.22354	-0.95651
36	-0.16410	-0.91766	0.10933	8.09	-0.14856	-0.93321
37	-0.10981	-0.85804	0.15775	11.43	-0.07790	-0.88994

## RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO. 1

## DESLOCAMENTOS DOS NOS

NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

## CARREGAMENTO NO. 1

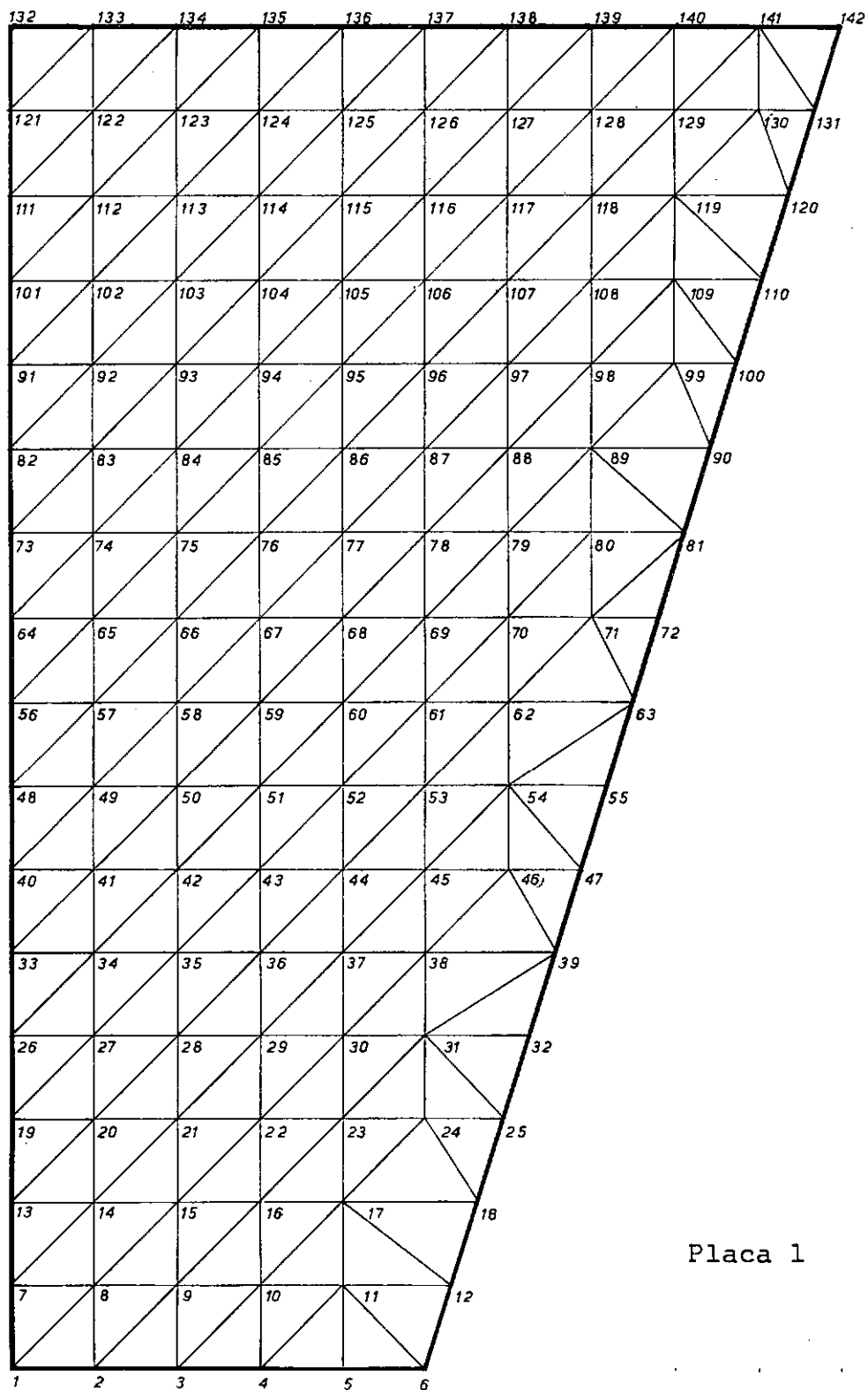
1	0.0000000	0.0000000	2	0.1488157	0.0000000	3	0.2911765	0.0000000
4	0.4209651	0.0000000	5	0.5316096	0.0000000	6	0.6148002	0.0000000
7	0.6564240	0.0000000	8	0.0724531	-0.5590183	9	0.2150755	-0.5397798
10	0.3472258	-0.5021878	11	0.4623129	-0.4443419	12	0.5537229	-0.3611503
13	0.6134355	-0.2381111						

## REAÇÕES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
----	-----	-----	-----

## CARREGAMENTO NO. 1

Tabela 5.2



132	0.000	-0.150
133	0.000	-0.300
134	0.000	-0.300
135	0.000	-0.300
136	0.000	-0.300
137	0.000	-0.300
138	0.000	-0.300
139	0.000	-0.300
140	0.000	-0.300
141	0.000	-0.300
142	0.000	-0.150

## RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO. 5

## DESLOCAMENTOS DOS NOS

NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3
CARREGAMENTO NO. 1											
111	0.0000000	-5.8777787		112	0.2105146	-5.9037292		113	0.4169015	-5.9817663	
114	0.0165863	-6.1135694		115	0.8065188	-6.3004895		116	0.9832179	-6.5447722	
117	1.1428749	-6.8505054		118	1.2816767	-7.2247342		119	1.3971905	-7.6781441	
120	1.5434704	-8.4507326		121	0.0000000	-6.2412588		122	0.2540619	-6.2626627	
123	0.5040839	-6.3375413		124	0.7483990	-6.4663485		125	0.9843880	-6.6498737	
126	1.2084003	-6.8703809		127	1.4181498	-7.1925820		128	1.6072374	-7.5653963	
129	1.7692732	-8.0253145		130	1.8919520	-8.8081123		131	1.9567716	-9.0783608	
132	0.0000000	-6.6216227		133	0.3030173	-6.6332048		134	0.16035665	-6.7054216	
135	0.0003044	-6.8320613		136	1.1910663	-7.0130498		137	1.4739996	-7.2504861	
138	1.7472554	-7.5490141		139	2.0080758	-7.9173574		140	2.2504010	-8.3711323	
141	2.4592725	-8.9359314		142	2.6069004	-9.6997064					

## REAÇÕES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
CARREGAMENTO NO. 1			
111	-0.1243	0.0000	
121	-0.1693	0.0000	
132	-0.1115	0.0000	

## TENSOES NORMAIS E DE CISCALHAMENTO. TENSOES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
CARREGAMENTO NO. 1						
121	0.59537	-1.01965	-0.00299	-0.10	0.59537	-1.01965
122	0.53927	-1.01580	-0.00329	-0.12	0.53928	-1.01581
123	0.52578	-1.00998	-0.01316	-0.49	0.52589	-1.01009
124	0.50374	-1.00798	-0.02221	-0.84	0.50407	-1.00830
125	0.47201	-1.00786	-0.03077	-1.19	0.47265	-1.00850
126	0.42705	-1.00958	-0.04010	-1.59	0.43017	-1.01070
127	0.37182	-1.01457	-0.05299	-2.18	0.37384	-1.01659
128	0.27395	-1.02640	-0.07596	-3.28	0.29830	-1.03076
129	0.18153	-1.05008	-0.12568	-5.76	0.19423	-1.06277
130	0.01543	-1.14585	-0.23584	-11.04	0.06198	-1.19190

Tabela 5.3



131	0.02400	-1.18698	-0.28313	-12.53	0.08693	-1.24991
132	0.70545	-1.01534	-0.01484	-0.49	0.70558	-1.01547
133	0.64962	-1.01096	-0.00446	-0.15	0.64964	-1.01098
134	0.64239	-0.99685	-0.01444	-0.50	0.64252	-0.99698
135	0.62596	-0.99426	-0.01972	-0.69	0.62620	-0.99450
136	0.60140	-0.99381	-0.02347	-0.84	0.60185	-0.99415
137	0.56919	-0.99417	-0.02707	-0.99	0.56966	-0.99464
138	0.52725	-0.99555	-0.03228	-1.21	0.52793	-0.99623
139	0.46933	-0.99936	-0.04300	-1.67	0.47059	-1.00062
140	0.37881	-1.00850	-0.06810	-2.80	0.38215	-1.01183
141	0.16408	-1.05416	-0.15114	-6.96	0.18256	-1.07263
142	0.15073	-1.13785	-0.23364	-9.96	0.19179	-1.17891

RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO. 4 \*\*\*\*\*

DESLOCAMENTOS NOS:

NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

CARREGAMENTO NO. 1

82	0.0000000	-4.8084937	83	0.1241311	-4.8381747	84	0.2458531	-4.9219637
85	0.3629304	-5.0602487	86	0.4730826	-5.2529057	87	0.5752465	-5.4990039
88	0.6690982	-5.7962897	89	0.7563141	-6.1399385	90	0.8837617	-6.6790703
91	0.0000000	-5.1619574	92	0.1449133	-5.1913581	93	0.2866908	-5.2741083
94	0.4224967	-5.4112073	95	0.5497161	-5.6033220	96	0.6661189	-5.8508705
97	0.7703648	-6.1538699	98	0.8629661	-6.5111909	99	0.9476436	-6.9191453
100	1.0046839	-7.2581371	101	0.0000000	-5.5124209	102	0.1731639	-5.5408743
103	0.3426071	-5.6217175	104	0.5053327	-5.7565834	105	0.6583228	-5.9467305
106	0.7984794	-6.1937518	107	0.9235420	-6.5000036	108	1.0321073	-6.8686538
109	1.1268083	-7.3028802	110	1.2203698	-7.8554191			

REAÇÕES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
----	-----	-----	-----

CARREGAMENTO NO. -1

82	-0.0231	0.0000
91	-0.0488	0.0000
101	-0.0827	0.0000

TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSÕES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
----	-------	-------	-------	------	------	------

CARREGAMENTO NO. 1

91	0.19188	-1.07516	-0.02560	-1.15	0.19240	-1.07568
92	0.15542	-1.08573	-0.03970	-1.82	0.15718	-1.08700
93	0.14071	-1.08577	-0.07923	-3.68	0.14581	-1.09087
94	0.11584	-1.08794	-0.12103	-5.68	0.12789	-1.09999
95	0.08147	-1.09463	-0.16550	-7.85	0.10431	-1.11748
96	0.03834	-1.11002	-0.21341	-10.19	0.07672	-1.14840
97	-0.01125	-1.14141	-0.26548	-12.58	0.04800	-1.20067
98	-0.06227	-1.20080	-0.32123	-14.71	0.02210	-1.28518
99	-0.10848	-1.31137	-0.37703	-16.04	-0.00007	-1.41977
100	-0.12092	-1.38140	-0.42580	-17.10	0.00212	-1.51245
101	0.30559	-1.04371	-0.02044	-0.86	0.30590	-1.04402

Tabela 5.3

102	0.26034	-1.05163	-0.02813	-1.22	0.26095	-1.05224
103	0.24393	-1.04948	-0.05700	-2.51	0.24643	-1.05199
104	0.21697	-1.04927	-0.08804	-3.95	0.22307	-1.05536
105	0.17839	-1.05259	-0.12166	-5.58	0.19079	-1.06450
106	0.12923	-1.06274	-0.15951	-7.49	0.15020	-1.08372
107	0.06854	-1.08653	-0.20452	-9.75	0.10368	-1.12167
108	0.00031	-1.13673	-0.26054	-12.31	0.05717	-1.19359
109	-0.07747	-1.24723	-0.33796	-15.01	0.01314	-1.33785
110	-0.08935	-1.31773	-0.30745	-16.12	0.02264	-1.42973
111	0.44273	-1.02454	-0.01331	-0.51	0.44285	-1.02466
112	0.38975	-1.02856	-0.01551	-0.62	0.38992	-1.02873
113	0.37302	-1.02411	-0.03391	-1.38	0.37464	-1.02493
114	0.34774	-1.02223	-0.05348	-2.23	0.34983	-1.02432
115	0.31073	-1.02285	-0.07440	-3.18	0.31437	-1.02699
116	0.25963	-1.02753	-0.09848	-4.35	0.26712	-1.03503
117	0.19386	-1.04074	-0.12965	-5.93	0.20733	-1.05421
118	0.11096	-1.07313	-0.17523	-8.24	0.13635	-1.09852
119	-0.00150	-1.17254	-0.26801	-12.29	0.05692	-1.23096
120	-0.06070	-1.30110	-0.34477	-14.53	0.02868	-1.39049

## RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO. 3

\*\*\*\*\*

## DESLOCAMENTOS DOS NOS

NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3
CARREGAMENTO NO. 1											
56	0.0000000	-3.6698223		57	0.0957630	-3.6979772		58	0.1914696	-3.7804625	
59	0.2865733	-3.9170552		60	0.3002686	-4.1064670		61	0.4715540	-4.3452583	
62	0.5597206	-4.6266868		63	0.8863049	-5.1003251		64	0.0000000	-4.0602044	
65	0.1007221	-4.0892006		66	0.2005860	-4.1727411		67	0.2984402	-4.3104964	
68	0.3932165	-4.5011106		69	0.4840962	-4.7414571		70	0.5707811	-5.0260803	
71	0.6529759	-5.3490305		72	0.7193422	-5.6373454		73	0.0000000	-4.4468038	
74	0.1098914	-4.4762872		75	0.2181355	-4.5603024		76	0.3230265	-4.6987272	
77	0.4231829	-4.8906897		78	0.5178857	-5.1340053		79	0.6076454	-5.4245643	
80	0.6948725	-5.7555048		81	0.7962381	-6.2030202					

## REAÇÕES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
----	-----	-----	-----

## CARREGAMENTO NO. 1

56	0.0231	0.0000
64	0.0120	0.0000
73	-0.0033	0.0000

## TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSOES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
----	-------	-------	-------	------	------	------

## CARREGAMENTO NO. 1

64	-0.02393	-1.23286	-0.03370	-1.59	-0.02299	-1.23380
65	-0.03788	-1.24698	-0.06282	-2.96	-0.03463	-1.25024
66	-0.04427	-1.25133	-0.12502	-5.85	-0.03145	-1.26414
67	-0.05480	-1.25771	-0.18788	-8.67	-0.02613	-1.28637
68	-0.06911	-1.26687	-0.25005	-11.33	-0.01900	-1.31697

Tabela 5.3

69	-0.08628	-1.28052	-0.30866	-13.66	-0.01122	-1.35558
70	-0.10515	-1.30080	-0.36016	-15.53	-0.00504	-1.40091
71	-0.12542	-1.33823	-0.40623	-16.90	-0.00192	-1.46173
72	-0.13512	-1.37216	-0.43237	-17.47	0.00102	-1.50830
73	0.03066	-1.17154	-0.03199	-1.52	0.03151	-1.17240
74	0.01045	-1.18500	-0.05730	-2.73	0.01319	-1.18774
75	0.00078	-1.18933	-0.11389	-5.42	0.01159	-1.19914
76	-0.01480	-1.19417	-0.17164	-8.11	0.00966	-1.21865
77	-0.03538	-1.20434	-0.22990	-10.73	0.00820	-1.24793
78	-0.05875	-1.22182	-0.28706	-13.13	0.00804	-1.28882
79	-0.08188	-1.25049	-0.36018	-15.10	0.00993	-1.34231
80	-0.10469	-1.28459	-0.37910	-16.36	0.00680	-1.39590
81	-0.11100	-1.30405	-0.40308	-17.02	0.01241	-1.42747
82	0.10135	-1.11834	-0.02933	-1.37	0.10206	-1.11904
83	0.07382	-1.13052	-0.04954	-2.35	0.07586	-1.13256
84	0.06106	-1.13246	-0.09851	-4.68	0.06914	-1.14054
85	0.04037	-1.13683	-0.14934	-7.11	0.05902	-1.15548
86	0.01251	-1.14606	-0.20206	-9.61	0.04674	-1.18029
87	-0.02089	-1.16407	-0.25638	-12.07	0.03396	-1.21894
88	-0.05660	-1.19701	-0.31112	-14.30	0.02275	-1.27637
89	-0.09091	-1.26551	-0.36445	-15.91	0.01297	-1.36940
90	-0.12067	-1.37414	-0.40626	-16.47	-0.00053	-1.49430

## RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO. 2

## DESLOCAMENTOS DOS NÓS

NO	01	02	03	NO	01	02	03	NO	01	02	03
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

## CARREGAMENTO NO. 1

26	0.0000000	-1.9163868		27	0.0817775	-1.9370241		28	0.1681629	-2.0034449	
29	0.2634182	-2.1213520		30	0.3692193	-2.3015084		31	0.4803561	-2.5586109	
32	0.6081163	-2.9464212		33	0.0000000	-2.3764398		34	0.0877286	-2.3998579	
35	0.1786220	-2.4733163		36	0.2750183	-2.6001875		37	0.3771718	-2.7852937	
38	0.4820381	-3.0299915		39	0.6364113	-3.5111338		40	0.0000000	-2.8352393	
41	0.0909967	-2.8607449		42	0.1838398	-2.9387444		43	0.2795857	-3.0707245	
44	0.3779538	-3.2579882		45	0.4768416	-3.4990023		46	0.5725910	-3.7882878	
47	0.6418619	-4.0587552		48	0.0000000	-3.2617269		49	0.0930765	-3.2887476	
50	0.1869783	-3.3694925		51	0.2818575	-3.5043128		52	0.3771524	-3.6926958	
53	0.4714777	-3.9316067		54	0.5630256	-4.2140929		55	0.6691796	-4.5884926	

## REAÇÕES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
----	-----	-----	-----

## CARREGAMENTO NO. 1

26	0.0627	0.0000
33	0.0509	0.0000
40	0.0414	0.0000
48	0.0322	0.0000

## TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSÕES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
----	-------	-------	-------	------	------	------

## CARREGAMENTO NO. 1

Tabela 5.3

33	-0.15366	-1.49875	-0.02960	-1.26	-0.15291	-1.49940
34	-0.15909	-1.51523	-0.05766	-2.43	-0.15664	-1.51768
35	-0.14934	-1.52876	-0.11944	-4.91	-0.13908	-1.53903
36	-0.13513	-1.54437	-0.18958	-7.52	-0.11007	-1.56943
37	-0.12148	-1.55075	-0.26871	-10.30	-0.07263	-1.59960
38	-0.11671	-1.52552	-0.35390	-13.33	-0.03280	-1.60942
39	-0.12163	-1.49469	-0.40508	-15.27	-0.01103	-1.60529
40	-0.12459	-1.43410	-0.03248	-1.42	-0.12379	-1.43490
41	-0.12976	-1.44978	-0.06367	-2.75	-0.12669	-1.45284
42	-0.12482	-1.45859	-0.12972	-5.50	-0.11232	-1.47109
43	-0.11820	-1.46795	-0.20014	-8.25	-0.08915	-1.49700
44	-0.11309	-1.47139	-0.27383	-10.97	-0.05996	-1.52452
45	-0.11348	-1.46288	-0.34539	-13.55	-0.03021	-1.54615
46	-0.11777	-1.44362	-0.39793	-15.48	-0.00751	-1.55389
47	-0.12439	-1.42646	-0.41385	-16.24	-0.00582	-1.54703
48	-0.09669	-1.36644	-0.03401	-1.53	-0.09578	-1.36735
49	-0.10293	-1.38137	-0.06622	-2.95	-0.09951	-1.38479
50	-0.10214	-1.38773	-0.13341	-5.86	-0.08844	-1.40143
51	-0.10183	-1.39462	-0.20261	-8.70	-0.07082	-1.42563
52	-0.10362	-1.39893	-0.27219	-11.39	-0.04875	-1.45381
53	-0.10901	-1.39819	-0.33748	-13.81	-0.02600	-1.48120
54	-0.11816	-1.39644	-0.39506	-15.86	-0.00591	-1.50869
55	-0.12472	-1.39865	-0.41338	-16.49	-0.00233	-1.52104
56	-0.06499	-1.29871	-0.03440	-1.59	-0.06393	-1.29967
57	-0.07403	-1.31322	-0.06585	-3.03	-0.07054	-1.31671
58	-0.07645	-1.31833	-0.13167	-5.98	-0.06314	-1.33215
59	-0.08225	-1.32466	-0.19839	-8.85	-0.05134	-1.35557
60	-0.09042	-1.33130	-0.26438	-11.54	-0.03644	-1.38529
61	-0.10158	-1.33846	-0.32603	-13.89	-0.02091	-1.41914
62	-0.11645	-1.34902	-0.37951	-15.81	-0.00897	-1.45651
63	-0.13147	-1.38324	-0.41658	-16.82	-0.00551	-1.50920

RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO. 1

\*\*\*\*\*

DESLOCAMENTOS DOS NÓS

NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3
CARREGAMENTO NO. 1											
1	0.0000000	0.0000000		2	0.0361307	0.0000000		3	0.0805685	0.0000000	
4	0.1419481	0.0000000		5	0.2380499	0.0000000		6	0.3325422	0.0000000	
7	0.0000000	-0.4738223		8	0.0436512	-0.4810188		9	0.0933799	-0.5020624	
10	0.1557111	-0.5423475		11	0.2405049	-0.6118903		12	0.4624794	-0.9564155	
13	0.0000000	-0.9517252		14	0.0577350	-0.9642970		15	0.1220801	-1.0043076	
16	0.2010766	-1.0801775		17	0.3040256	-1.2137903		18	0.5252521	-1.6898097	
19	0.0000000	-1.4274400		20	0.0714450	-1.4464577		21	0.1489137	-1.5017204	
22	0.2388094	-1.6032619		23	0.3454433	-1.7694917		24	0.4645470	-2.0380842	
25	0.5703821	-2.3448681									

REAÇÕES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
CARREGAMENTO NO. 1			
1	0.0601	0.2433	
2	0.0000	0.4963	
3	0.0000	0.5161	
4	0.0000	0.5548	

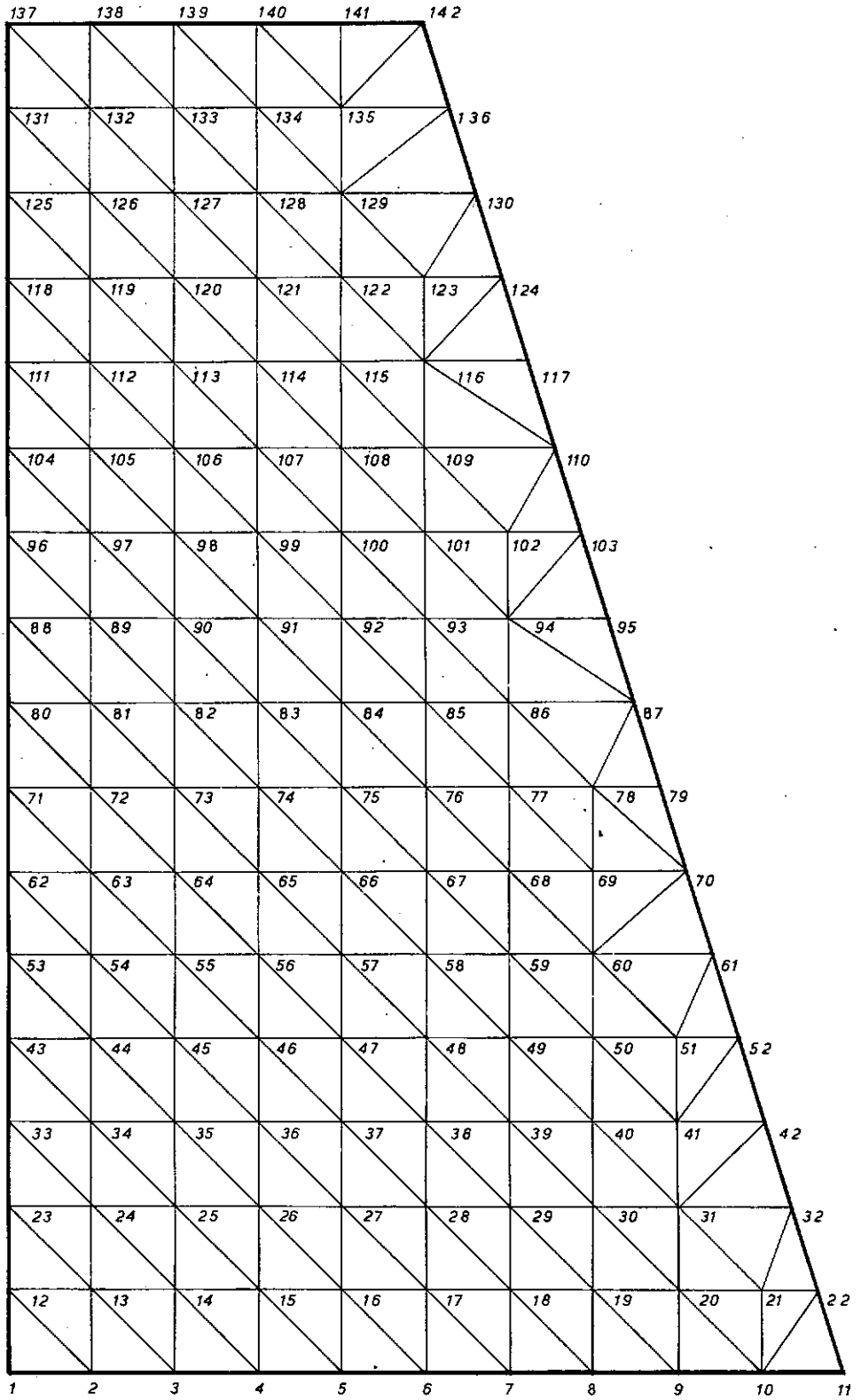
Tabela 5.3

5	0.0000	0.6192
6	0.0000	0.5700
7	0.1092	0.0000
13	0.0935	0.0000
19	0.0778	0.0000

## TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSÕES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
CARREGAMENTO NO. 1						
1	-0.36159	-1.64854	0.00005	0.00	-0.36159	-1.64854
2	-0.35990	-1.68227	0.00252	0.10	-0.35990	-1.68227
3	-0.34289	-1.76574	-0.00092	-0.03	-0.34288	-1.76574
4	-0.30559	-1.71596	-0.01732	-0.61	-0.30540	-1.91615
5	-0.30164	-2.06433	0.00304	0.09	-0.30163	-2.06433
6	-0.30584	-2.49304	-0.11953	-3.11	-0.29932	-2.49955
7	-0.33159	-1.64249	-0.00569	-0.24	-0.33157	-1.64251
8	-0.33447	-1.66348	-0.00574	-0.24	-0.33944	-1.86351
9	-0.32441	-1.72499	-0.01431	-0.58	-0.32426	-1.72513
10	-0.29661	-1.84459	-0.03524	-1.30	-0.29780	-1.84539
11	-0.25344	-2.14422	-0.09656	-2.91	-0.24852	-2.14914
12	-0.16740	-2.32447	-0.28494	-7.39	-0.13039	-2.36148
13	-0.20144	-1.63043	-0.01234	-0.52	-0.28133	-1.63054
14	-0.29209	-1.65009	-0.01877	-0.79	-0.29183	-1.65035
15	-0.27247	-1.69769	-0.04203	-1.68	-0.27123	-1.69893
16	-0.23828	-1.78104	-0.08478	-3.13	-0.23363	-1.78568
17	-0.16550	-1.90316	-0.21335	-6.89	-0.13969	-1.92898
18	-0.13200	-1.89503	-0.36506	-11.24	-0.05940	-1.96763
19	-0.23070	-1.60112	-0.01922	-0.80	-0.23043	-1.60139
20	-0.24039	-1.61972	-0.03410	-1.41	-0.23954	-1.62056
21	-0.22124	-1.65292	-0.07417	-2.95	-0.21741	-1.65675
22	-0.19007	-1.70367	-0.13336	-4.99	-0.17840	-1.71533
23	-0.15544	-1.75068	-0.23168	-8.09	-0.12248	-1.78365
24	-0.11193	-1.74553	-0.35282	-11.68	-0.03899	-1.81847
25	-0.12566	-1.70666	-0.40267	-13.49	-0.02919	-1.80332
26	-0.18755	-1.55585	-0.02518	-1.05	-0.18708	-1.55631
27	-0.17498	-1.57341	-0.04777	-1.98	-0.19333	-1.57506
28	-0.18003	-1.59481	-0.10118	-4.07	-0.17263	-1.60201
29	-0.19681	-1.62301	-0.16846	-6.47	-0.13770	-1.64212
30	-0.13269	-1.63746	-0.25657	-9.41	-0.09015	-1.68000
31	-0.11602	-1.61013	-0.36622	-13.06	-0.03184	-1.69511
32	-0.12636	-1.57221	-0.40780	-14.71	-0.01927	-1.67930

Tabela 5.3



Placa 2

## CARREGAMENTO NO. 1

80	0.04436	-0.73594	0.01328	0.97	0.04458	-0.73617
81	0.03965	-0.73621	0.02671	1.96	0.04057	-0.73713
82	0.03335	-0.72195	0.05358	4.03	0.03713	-0.72573
83	0.02284	-0.69879	0.07890	6.16	0.03137	-0.70731
84	0.00864	-0.66851	0.10187	8.37	0.02364	-0.68350
85	-0.00821	-0.63420	0.12206	10.65	0.01474	-0.65716
86	-0.02773	-0.59783	0.14238	13.27	0.00585	-0.63141
87	-0.04498	-0.57455	0.15571	15.22	-0.00259	-0.61694
88	0.03205	-0.76594	0.01543	1.10	0.03235	-0.76624
89	0.02708	-0.76685	0.03112	2.24	0.02829	-0.76807
90	0.02111	-0.75130	0.06257	4.60	0.02615	-0.75634
91	0.01105	-0.72574	0.09203	7.01	0.02237	-0.73707
92	-0.00292	-0.69218	0.11822	9.46	0.01717	-0.71188
93	-0.01851	-0.65336	0.14045	11.93	0.01117	-0.68364
94	-0.03861	-0.61255	0.16138	14.67	0.00364	-0.65482
95	-0.04647	-0.58594	0.16355	15.61	-0.00076	-0.63165
96	0.01775	-0.80093	0.01749	1.22	0.01812	-0.80130
97	0.01198	-0.80246	0.03519	2.47	0.01350	-0.80398
98	0.00685	-0.78538	0.07107	5.08	0.01318	-0.79171
99	-0.00207	-0.75674	0.10461	7.74	0.01215	-0.77098
100	-0.01451	-0.71869	0.13382	10.40	0.01005	-0.74327
101	-0.02970	-0.67619	0.15751	12.98	0.00662	-0.71253
102	-0.04242	-0.63687	0.17445	15.20	0.00499	-0.68428
103	-0.04855	-0.61291	0.17226	15.70	-0.00012	-0.66134

## RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO. 3

\*\*\*\*\*

## DESLOCAMENTOS DOS NOS

NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3
CARREGAMENTO NO. 1											
43	0.0000000	-0.8491271		44	0.0853148	-0.8440581		45	0.1689160	-0.8287823	
46	0.2491457	-0.8033494		47	0.3243740	-0.7677451		48	0.3929968	-0.7217077	
49	0.4033927	-0.6644730		50	0.5038813	-0.5944973		51	0.5431056	-0.5091002	
52	0.5680027	-0.4336540		53	0.0000000	-1.0644327		54	0.0834533	-1.0579005	
55	0.1650709	-1.0384240		56	0.2430697	-1.0061481		57	0.3157754	-0.9612226	
58	0.3216976	-0.9036057		59	0.4396295	-0.8328323		60	0.4889591	-0.7482898	
61	0.5385568	-0.6041556		62	0.0000000	-1.2905142		63	0.0816969	-1.2824186	
64	0.1614212	-1.2584161		65	0.2372547	-1.2188221		66	0.3074413	-1.1661070	
67	0.3704954	-1.0946802		68	0.4252644	-1.0105218		69	0.4705053	-0.9101512	
70	0.5100777	-0.7674323									

## REAÇÕES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
----	-----	-----	-----

## CARREGAMENTO NO. 1

43	-0.0272	0.0000
53	-0.0240	0.0000
62	-0.0206	0.0000

## TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSÕES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIGI	SIG2
----	-------	-------	-------	------	------	------

Tabela 5.4

CARREGAMENTO NO. 1						
53	0.07819	-0.67349	0.00697	0.53	0.07826	-0.67355
54	0.07358	-0.67219	0.01384	1.06	0.07384	-0.67245
55	0.06818	-0.66009	0.02801	2.19	0.06926	-0.66116
56	0.05924	-0.64042	0.04170	3.39	0.06172	-0.64290
57	0.04699	-0.61384	0.05495	4.72	0.05153	-0.61838
58	0.03181	-0.58126	0.06825	6.27	0.03932	-0.58877
59	0.01445	-0.54398	0.08253	8.23	0.02640	-0.55593
60	-0.01000	-0.49638	0.10330	11.50	0.01102	-0.51742
61	-0.02105	-0.45489	0.10883	13.34	0.00396	-0.48071
62	0.06726	-0.69004	0.00900	0.68	0.06736	-0.69014
63	0.06250	-0.68920	0.01791	1.36	0.06293	-0.68971
64	0.05660	-0.67672	0.03605	2.80	0.05837	-0.67849
65	0.04687	-0.65640	0.05341	4.31	0.05090	-0.66044
66	0.03368	-0.62939	0.06981	5.94	0.04095	-0.63666
67	0.011765	-0.59709	0.08551	7.77	0.02932	-0.60877
68	-0.00063	-0.56038	0.10139	9.95	0.01716	-0.57818
69	-0.01740	-0.52922	0.12143	12.69	0.00994	-0.55657
70	-0.02556	-0.49259	0.12734	14.30	0.00690	-0.52506
71	0.05591	-0.71081	0.01112	0.83	0.05608	-0.71097
72	0.05120	-0.71054	0.02224	1.67	0.05185	-0.71119
73	0.04497	-0.69727	0.04463	3.42	0.04765	-0.69994
74	0.03466	-0.67580	0.06588	5.25	0.04072	-0.68186
75	0.02074	-0.64757	0.08554	7.17	0.03152	-0.65835
76	0.00393	-0.61462	0.10372	9.27	0.02086	-0.63155
77	-0.01534	-0.57949	0.12231	11.72	0.01003	-0.60487
78	-0.03327	-0.54044	0.14025	14.47	0.00292	-0.57664
79	-0.04503	-0.51997	0.14741	15.91	-0.00299	-0.56200

RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO. 2 \*\*\*\*\*

DESLOCAMENTOS DOS NOS

NO	01	02	03	NO	01	02	03	NO	01	02	03
CARREGAMENTO NO. 1											
23	0.0000000	-0.4186589		24	0.0885928	-0.4164120		25	0.1758102	-0.4091655	
26	0.2602894	-0.3969515		27	0.3406665	-0.3797119		28	0.4155689	-0.3572003	
29	0.4835514	-0.3287788		30	0.5429449	-0.2930047		31	0.5916717	-0.2470014	
32	0.6291696	-0.1555053		33	0.0000000	-0.6293815		34	0.0871448	-0.6259808	
35	0.1727440	-0.6148707		36	0.2952849	-0.5962723		37	0.3332549	-0.5701169	
38	0.4051219	-0.5360947		39	0.4692692	-0.4933937		40	0.5238810	-0.4402021	
41	0.5665239	-0.3719902		42	0.6015230	-0.2793941					

REAÇÕES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
----	-----	-----	-----

CARREGAMENTO NO. 1

23	-0.0317	0.0000
33	-0.0300	0.0000

TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSOES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
----	-------	-------	-------	------	------	------

CARREGAMENTO NO. 1

Tabela 5.4



33	0.09652	-0.65187	0.00343	0.26	0.09654	-0.65189
34	0.09271	-0.64957	0.00695	0.53	0.09298	-0.64963
35	0.09876	-0.63812	0.01436	1.13	0.08904	-0.63841
36	0.08178	-0.61927	0.02141	1.74	0.08244	-0.61992
37	0.07179	-0.59303	0.02812	2.41	0.07316	-0.59422
38	0.05920	-0.55937	0.03478	3.20	0.06115	-0.56132
39	0.04307	-0.51810	0.04221	4.27	0.04623	-0.52126
40	0.02242	-0.46851	0.05238	6.02	0.02815	-0.47404
41	-0.00259	-0.42363	0.07816	10.18	0.01144	-0.43767
42	-0.01051	-0.37971	0.07532	11.09	0.00426	-0.39444
43	0.00813	-0.66092	0.00513	0.39	0.08817	-0.66096
44	0.08386	-0.65710	0.01019	0.78	0.08400	-0.65924
45	0.07902	-0.64735	0.02079	1.63	0.07962	-0.64795
46	0.07074	-0.62812	0.03102	2.53	0.07231	-0.62950
47	0.05963	-0.60171	0.04095	3.53	0.06216	-0.60424
48	0.04505	-0.56854	0.05107	4.72	0.04927	-0.57276
49	0.02643	-0.52931	0.06245	6.32	0.03386	-0.53624
50	0.00480	-0.48657	0.07731	8.73	0.01668	-0.49845
51	-0.01583	-0.45488	0.09774	12.00	0.00494	-0.47566
52	-0.01665	-0.42851	0.09863	12.79	0.00575	-0.45091

## RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO. 1

## DESLOCAMENTOS DOS NOS

NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3
CARREGAMENTO NO. 1											
1	0.0000000	0.0000000		2	0.0891600	0.0000000		3	0.1775484	0.0000000	
4	0.2636760	0.0000000		5	0.3462236	0.0000000		6	0.4239647	0.0000000	
7	0.4957234	0.0000000		8	0.5603388	0.0000000		9	0.6166590	0.0000000	
10	0.6636422	0.0000000		11	0.6776291	0.0000000		12	0.0000000	-0.2088832	
13	0.0893859	-0.2078920		14	0.1775960	-0.2043474		15	0.2633439	-0.1983099	
16	0.3453527	-0.1897610		17	0.4223625	-0.1785809		18	0.4930679	-0.1644575	
19	0.5559340	-0.1466796		20	0.6086648	-0.1235048		21	0.6460347	-0.0881152	
22	0.6647844	-0.0543359									

## REACOES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
----	-----	-----	-----

## CARREGAMENTO NO. 1

1	-0.0161	0.0963
2	0.0000	0.1917
3	0.0000	0.1886
4	0.0000	0.1832
5	0.0000	0.1755
6	0.0000	0.1655
7	0.0000	0.1527
8	0.0000	0.1365
9	0.0000	0.1155
10	0.0000	0.0777
11	0.0000	0.0161
12	-0.0328	0.0000

## TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSOES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
----	-------	-------	-------	------	------	------

Tabela 5.4

## CARRREGAMENTO NO. 1

1	0.10445	-0.64247	0.00000	0.00	0.10445	-0.64247
2	0.10449	-0.64033	0.00061	0.04	0.10449	-0.64033
3	0.10221	-0.63233	0.00164	0.12	0.10222	-0.63233
4	0.09761	-0.61691	0.00232	0.18	0.09762	-0.61692
5	0.09101	-0.59402	0.00279	0.23	0.09102	-0.59403
6	0.08269	-0.56328	0.00309	0.27	0.08270	-0.56329
7	0.07274	-0.52381	0.00317	0.30	0.07296	-0.52382
8	0.06213	-0.47363	0.00285	0.30	0.06214	-0.47365
9	0.05076	-0.40803	0.00146	0.18	0.05096	-0.40803
10	0.02167	-0.27903	0.01164	2.21	0.02212	-0.27948
11	-0.00454	-0.17724	-0.01015	-3.39	-0.00594	-0.17784
12	0.10504	-0.64219	0.00094	0.07	0.10504	-0.64219
13	0.10386	-0.63923	0.00219	0.16	0.10388	-0.63924
14	0.10108	-0.62836	0.00469	0.36	0.10111	-0.62839
15	0.09615	-0.61012	0.00689	0.55	0.09621	-0.61019
16	0.08223	-0.58433	0.00885	0.75	0.08934	-0.58444
17	0.08045	-0.55049	0.01063	0.96	0.08063	-0.55067
18	0.06983	-0.50746	0.01235	1.22	0.07010	-0.50773
19	0.05690	-0.45273	0.01433	1.60	0.05730	-0.45313
20	0.03933	-0.37983	0.01819	2.48	0.04012	-0.38062
21	0.01447	-0.30380	0.03491	6.18	0.01826	-0.30759
22	0.00478	-0.24417	0.02140	4.87	0.00661	-0.24600
23	0.10243	-0.64584	0.00201	0.15	0.10244	-0.64585
24	0.09982	-0.64312	0.00428	0.33	0.09985	-0.64315
25	0.09637	-0.63197	0.00904	0.71	0.09648	-0.63209
26	0.09054	-0.61347	0.01345	1.09	0.09080	-0.61372
27	0.08239	-0.58746	0.01752	1.49	0.08285	-0.58791
28	0.07189	-0.55356	0.02142	1.95	0.07263	-0.55430
29	0.05882	-0.51089	0.02566	2.57	0.05997	-0.51205
30	0.04243	-0.45778	0.03154	3.59	0.04441	-0.45976
31	0.01115	-0.38371	0.04971	7.06	0.01731	-0.38987
32	0.00148	-0.30247	0.04846	8.84	0.00902	-0.31001

Tabela 5.4

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
CARREGAMENTO NO. 1						
1	-0.86947	-1.12255	0.00753	1.70	-0.86925	-1.12278
2	-0.88268	-1.27820	0.01064	1.54	-0.88239	-1.27848
3	-0.84097	-1.80946	-0.00070	-0.04	-0.84097	-1.80946
4	-0.80875	-2.70735	-0.33067	-8.74	-0.75788	-2.95822
5	-0.78211	-1.17183	-0.00895	-1.31	-0.78190	-1.17203
6	-0.76340	-1.44834	-0.04843	-4.02	-0.75977	-1.45175
7	-0.64870	-2.18331	-0.32552	-11.49	-0.58250	-2.24951
8	0.54800	-2.51484	-0.78691	-19.33	-0.27191	-2.79092
9	0.51560	-1.09738	-0.01611	-1.58	-0.51515	-1.09783
10	0.51259	-1.21648	-0.04903	-3.96	-0.50919	-1.21988
11	-0.45831	-1.54849	-0.21722	-10.86	-0.41662	-1.59018
12	-0.39749	-1.77883	-0.62868	-21.15	-0.15420	-2.02212
13	-0.51894	-1.87103	-0.88602	-26.83	-0.07065	-2.27012
14	-0.14219	-1.10006	-0.03819	-2.28	-0.14067	-1.10158
15	0.13934	-1.22910	-0.13290	-6.85	-0.12336	-1.24508
16	-0.15796	-1.38317	-0.36813	-15.50	-0.05506	-1.48520
17	-0.32268	-1.49693	-0.67725	-24.53	-0.01347	-1.80612
18	-0.45973	-1.60366	-0.86925	-28.32	0.00885	-2.07225
19	0.33438	-1.04114	-0.02108	-0.87	0.33470	-1.04146
20	0.31810	-1.07433	-0.05721	-2.34	0.32045	-1.07668
21	0.27002	-1.14360	-0.17366	-6.90	0.29109	-1.16467
22	0.12103	-1.21416	-0.35734	-14.07	0.21065	-1.30378
23	-0.14723	-1.32656	-0.60074	-22.76	0.10488	-1.57868
24	-0.30055	-1.46671	-0.76722	-26.38	0.08000	-1.84728
25	0.89000	-1.01743	-0.01613	-0.48	0.89014	-1.01756
26	0.85396	-1.03656	-0.04896	-1.48	0.85522	-1.03782
27	0.75022	-1.06215	-0.11868	-3.73	0.75796	-1.06989
28	0.53875	-1.10074	-0.22889	-7.80	0.57010	-1.13210
29	0.19026	-1.19081	-0.41340	-15.45	0.30455	-1.30510
30	0.01323	-1.26634	-0.51162	-19.32	0.19264	-1.44575
31	1.20170	-1.01451	-0.00840	-0.21	1.20173	-1.01454
32	1.30222	-1.01056	-0.00848	-0.21	1.30225	-1.01059
33	1.25339	-1.01996	-0.02963	-0.74	1.25378	-1.02035
34	1.12771	-1.03481	-0.07065	-1.86	1.13002	-1.03712
35	0.87304	-1.07051	-0.15128	-4.42	0.88474	-1.08221
36	0.39348	-1.12711	-0.31574	-11.27	0.45644	-1.19007
37	0.24690	-1.23519	-0.43454	-15.19	0.36491	-1.35320

// EJECT

Tabela 5.5

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
CARREGAMENTO NO. 1						
1	0.18694	-0.86525	0.00465	0.25	0.18696	-0.86527
2	0.17866	-0.81054	0.00609	0.35	0.17870	-0.81058
3	0.14616	-0.70994	0.01080	0.72	0.14630	-0.71007
4	0.09903	-0.54623	0.01267	1.12	0.09928	-0.54648
5	0.04771	-0.34775	0.01099	1.59	0.04801	-0.34806
6	0.00386	-0.13881	0.00567	2.27	0.00409	-0.13904
7	0.01014	-0.03369	-0.01745	-28.00	-0.00086	-0.04297
8	0.17397	-0.85134	0.01355	0.75	0.17415	-0.85152
9	0.15417	-0.77907	0.02746	1.68	0.15497	-0.77988
10	0.11385	-0.63736	0.03986	3.02	0.11596	-0.63947
11	0.06314	-0.444910	0.04330	4.79	0.06678	-0.45274
12	0.01475	-0.23705	0.03625	8.03	0.01987	-0.24217
13	-0.00362	-0.09520	0.01317	8.02	-0.00176	-0.09706
14	0.13584	-0.89530	0.01741	0.96	0.13613	-0.89560
15	0.13144	-0.84981	0.03622	2.11	0.13278	-0.85114
16	0.10465	-0.73307	0.06860	4.65	0.11023	-0.73865
17	0.05838	-0.55279	0.08659	7.91	0.07041	-0.56482
18	0.00579	-0.33559	0.08320	12.99	0.02499	-0.35479
19	-0.00840	-0.18345	0.05330	15.67	0.00655	-0.19841
20	0.06443	-0.91207	0.03251	1.90	0.06651	-0.91315
21	0.06100	-0.83748	0.07307	4.61	0.06691	-0.84337
22	0.03428	-0.67240	0.11786	9.22	0.05342	-0.69154
23	-0.01779	-0.44364	0.13270	15.96	0.02017	-0.48161
24	-0.03158	-0.27878	0.10467	20.13	0.00678	-0.31715
25	-0.05410	-0.95708	0.01908	-1.21	-0.05369	-0.95748
26	-0.04273	-0.93195	0.04690	3.01	-0.04027	-0.93442
27	-0.03131	-0.81801	0.11276	7.99	-0.01547	-0.83386
28	-0.05026	-0.58347	0.17040	16.29	-0.00046	-0.63328
29	-0.06433	-0.39023	0.15669	21.93	-0.00121	-0.45335
30	-0.22526	-0.98173	0.01641	1.24	-0.22490	-0.98208
31	-0.19520	-0.94620	0.05511	4.17	-0.19118	-0.95022
32	-0.14092	-0.79051	0.14647	12.13	-0.10942	-0.82201
33	-0.10533	-0.58735	0.18369	18.65	-0.04331	-0.64038
34	-0.33955	-0.98692	0.00755	0.66	-0.33946	-0.98701
35	-0.36917	-0.98353	0.01418	1.32	-0.36885	-0.98586
36	-0.29048	-0.91764	0.08462	7.55	-0.27926	-0.92885
37	-0.20419	-0.77495	0.15847	14.52	-0.16314	-0.81600

Tabela 5.6

### DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Placa 1B - Método das Diferenças Finitas - Coordenadas Triangulares.

Tabela (4.4) - Apresenta os valores das tensões nos pontos da malha (24x24).

Tensão  $\sigma_y$ : Apresenta bons resultados em todos os pontos. No bordo superior tem valor unitário em todos os pontos, crescendo nos demais pontos, do centro para o contorno inclinado. A medida que se aproxima do ponto XII do contorno, sofre algumas alterações. Por exemplo: nos pontos X e XI apresenta valores mais baixos que seus adjacentes ; no ponto XII, apresenta um valor bem alto, espelhando a concentração de tensões, provocada pelo entalhe.

Tensão  $\sigma_x$ : Apresenta valores razoáveis em todos os pontos. O bordo superior é tracionado, diminuindo a tensão de tração do centro para a periferia. A medida que se penetra no interior da placa, a tensão de tração diminui e, continua diminuindo - sempre do centro para a periferia. Na altura da linha média já se nota uma pequena tensão de compressão. Esta já se torna uma considerável - tensão de compressão nos pontos sobre o eixo de simetria horizontal.

Tensão  $\tau_{xy}$ : Apresenta bons valores, mormente nos pontos do bordo superior e sôbre os eixos de simetria, onde deve ser nula. Aumenta de valor absoluto ao se aproximar dos pontos do bordo inclinado, possuindo, nêstes pontos e adjacentes, valores bem significativos.

Gráficos (6.3), (6.4) Compara os resultados obtidos por Diferenças Finitas em coordenadas triangulares e os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, respectivamente para as tensões  $\sigma_y$  e  $\sigma_x$ . No gráfico (6.3) se observa que os valores de  $\sigma_y$  são praticamente coincidentes, apenas nos pontos próximos de XII, há diferenças mais acentuadas.

No gráfico (6.4) as tensões  $\sigma_x$  apresentam uma variação significativa entre os métodos, nos pontos do bordo superior e do eixo de simetria horizontal. Como estas tensões dependem do momento atuante na placa e êste, por sua vez, depende da distribuição do  $\sigma_y$ , constata-se a viabilidade destas diferenças. Os valores de  $\sigma_x$ , no bordo superior e eixo de simetria horizontal, se aproximam mais daqueles calculados por Elementos Finitos, para a placa 1 e apresentados na Tabela 5.3 .

Placa 2A - Método das Diferenças Finitas - Coordenadas Oblíquas.

Tabela (4.6): Apresenta os valores das tensões nos pontos da malha (27x27).

Tensão  $\sigma_y$ : Apresenta bons valores em todos os pontos. No bordo superior tem valor unitário, diminuindo para o interior da placa, bem como, do centro para a periferia.

Tensão  $\sigma_x$ : Apresenta valores razoáveis, sendo o bordo superior comprimido, diminuindo a tensão de compressão do centro para a periferia, bem como, nos pontos interiores. Na altura da linha média, há uma pequena tensão de tração, que irá assumir valor significativo nos pontos sobre o eixo de simetria horizontal.

Tensão  $\tau_{xy}$ : Valores razoáveis em todos os pontos.

Gráfico (6.5) Compara os resultados de  $\sigma_y$ , obtidos por Diferenças Finitas em coordenadas oblíquas e os do Método dos Elementos Finitos. As diferenças são muito pequenas entre os Métodos.

Gráfico (6.6) As tensões  $\sigma_x$  apresentam variação significativa no bordo superior e alguns pontos do eixo de simetria horizontal, motivada pela distribuição do  $\sigma_y$ . A exemplo da Placa 1B, estes va

lores são mais próximos dos obtidos por Elementos Finitos, com a Placa 2, cujos valores estão na Tabela 5.4 .

Placa 1C - Método das Diferenças Finitas - Coordenadas Triangulares.

Tabela (4.7): Apresenta os valores das tensões nos pontos da malha (24x24).

Como esta placa é idêntica à anterior, somente variando o ângulo  $\alpha$ , o autor procurará ser sintético em seus comentários.

Em linhas gerais todas as observações feitas para a placa 1B, valem para a 1C, no entanto, nota-se nesta placa, que os pontos do contorno apresentam valores em Diferenças Finitas bem mais altos do que os obtidos por Elementos Finitos. São os valores de  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  os que se mostram mais sensíveis a esta variação, inclusive o ponto XII apresenta um valor de  $\sigma_x$  nulo e um valor de  $\sigma_y$  bastante alto, sentindo de uma maneira extraordinária a influência da inclinação do contorno, isto em Diferenças Finitas.

Placa 2B - Método das Diferenças Finitas - Coordenadas Oblíquas.



Tabela (6.6) Apresenta os valores das tensões nos pontos da malha (27x27).

Os comentários feitos para 2A são inteiramente aplicáveis a 2B.

### CONCLUSÃO

Como se sabe, o Método dos Elementos Finitos e o das Diferenças Finitas são conceitualmente bem diferentes. O primeiro consiste em dividir o contínuo em elementos, tratando-se de uma aproximação física do real e, através de superposição, se chegar a um sistema linear. O segundo consiste na substituição das equações diferenciais e condições de contorno, em termos de um número finito de incógnitas, referidas a pontos discretos, dentro ou fora do contorno. Trata-se, pois, de uma aproximação matemática do real, formando as equações de Diferenças Finitas um sistema de equações lineares.

Os resultados obtidos por Diferenças Finitas, tanto em coordenadas oblíquas, como em coordenadas triangulares, se apresentam bons, quando comparados com os obtidos pelo método dos Elementos Finitos. Parece que o ângulo de inclinação do contorno lateral, em outras palavras, o entalhe ou saliência, exerce influência na distribuição das tensões, mormente em pontos do contorno e, de uma maneira especial, na placa com entalhe, onde deve haver uma grande concentração de tensões.

Esta observação da influência do ângulo na distribuição das tensões, carece de um estudo mais minucioso para ser admitida como conclusão.

O autor deseja chamar atenção para os valores numéricos dos coeficientes do sistema linear em Diferenças Fi

nitais, de uma maneira particular, para os coeficientes centrais, isto é, aquêles que, em valor absoluto, são bem maiores que os demais. Qualquer variação no valor numérico dos coeficientes, mormente os de maior valor absoluto, determinará respostas completamente diferentes para o sistema. Note-se que se está falando de erros inferiores a 2% nos coeficientes centrais da molécula.

O próprio autor possui uma experiência pessoal nesse sentido, onde as raízes mudaram completamente e, como tal, a distribuição de tensões ficou totalmente alterada, inclusive houve mudança de sinal. Isto para um erro da ordem de 1,5% no coeficiente  $K_2$  da molécula em coordenadas trian-gulares.

Conforme se pode observar no presente trabalho, as condições de contorno são tratadas com extrema simplicidade. Espera-se, com isto, dar uma contribuição válida para o estudo de chapas, pois, embora o assunto seja bem conhecido, a sua aplicabilidade a casos especiais é praticamente desco-nhecida. Não só os pontos externos, fictícios, são de fácil determinação, como também os dupla e triplamente externos, conforme se pode constatar no texto.

Como se disse na introdução: o grande volume de cálculo torna imprescindível a utilização do computador na solução do problema, embora nem sempre seja fácil uma automatização total do cálculo.

Os programas apresentados no apêndice, não têm esta pretensão, mas trazem consigo as imposições do problema específico e as limitações de quem programou. Deve-se dizer, contudo, que face a inexistência, ou pelo menos, desconhecimento da existência de outros similares, espera-se que o mesmo seja aceito. Pode-se afirmar que se procurou, com honestidade, desenvolver um "programa eficiente". Esta afirmativa pode ser corroborada pelo simples exame do programa que gera as equações lineares, este programa admite o sistema de coordenadas triangulares, oblíquas, cartesianas e, à primeira vista, parece admitir também o sistema de coordenadas polares e outros sistemas planos.

O que se afirmou no parágrafo anterior é de uma importância capital, pois, o tipo de malha e de coordenadas, é função direta da configuração do contorno.

Como já se disse no Capítulo em que se apresenta os resultados por Elementos Finitos, o autor não deseja estabelecer comparações entre os dois métodos, mas entre os resultados obtidos por um e por outro. As comparações que, porventura, aparecerem são extensíveis tão somente ao problema específico, isto é, placas de espessura delgada de forma poligonal, com carregamento no contorno, atuando no próprio plano da placa.

A potencialidade do Método dos Elementos Finitos e a sua total automatização, através do trabalho do prof.

Alcebíades Vasconcellos Filho<sup>9</sup>, que tornou o assunto mais acessível aos estudiosos, constituem argumentos irrefutáveis a favor dos Elementos Finitos.

A realidade das universidades brasileiras, a maioria com computadores de pequeno porte (8K de capacidade de memória) e a divulgação, ainda incipiente, dos métodos matriciais para o cálculo de estruturas, quase que exclusivamente conhecidos dos alunos egressos de cursos de pós-graduação, parecem se constituir, a curto prazo, em obstáculos para uma maior difusão do Método dos Elementos Finitos.

Até que estas condições adversas sejam superadas, o Método das Diferenças Finitas e os programas desenvolvidos no presente trabalho, poderão ser úteis na solução de alguns problemas estruturais.

Resumindo as conclusões, procurar-se-á sintetizar os aspectos mais importantes, que irão determinar a maior ou menor aplicabilidade e amplitude do Método das Diferenças Finitas, sempre tendo em vista o problema específico.

O Método das Diferenças Finitas, largamente utilizado na análise numérica, bem como na solução de problemas da teoria da elasticidade exige:

- a) Definição do tipo de malha e daí do sistema de coordenadas, função direta da configuração do contorno. No caso de contornos irregulares, a geração do sistema linear torna-se bastante complexa, mormente se o pretendido for a automatiza

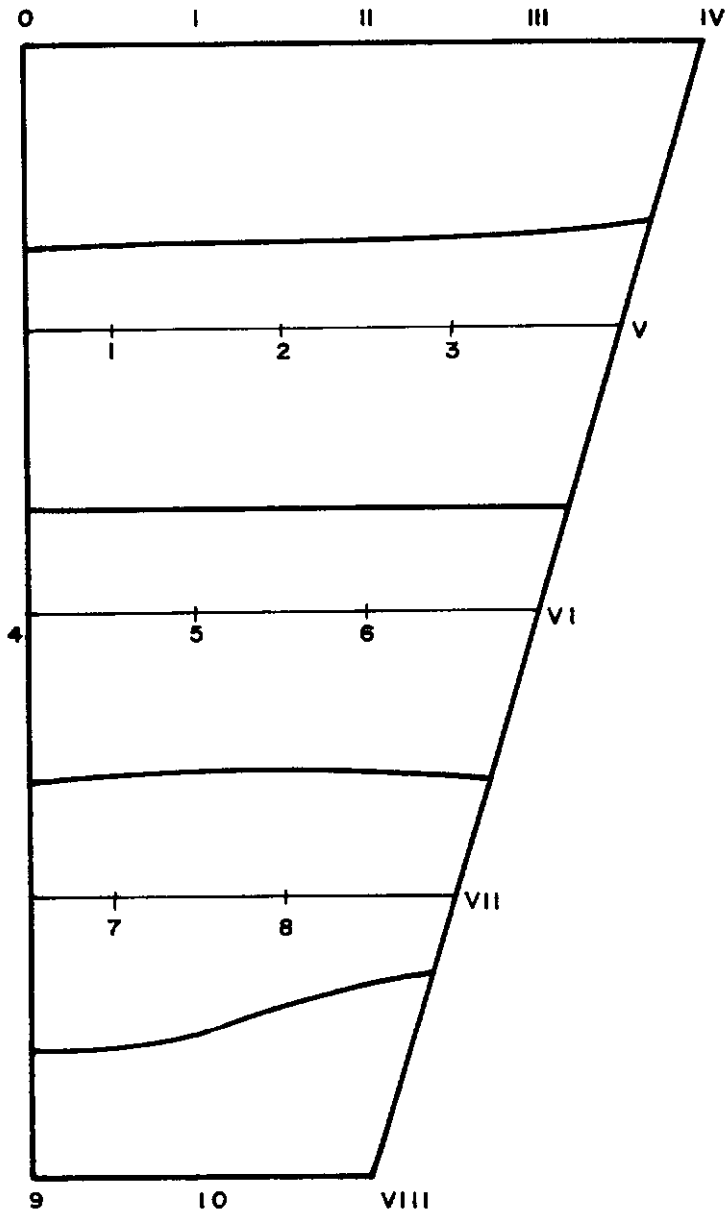
ção dos cálculos. Deve-se procurar uma malha que se adapte regularmente ao contorno.

- b) As condições de contorno, pontos do contorno e pontos externos, que inicialmente apresentavam dificuldades para a sua determinação, se tornam bastante simples. É necessário que se observe, que isto nem sempre é possível. Dependerá da configuração do contorno e da distribuição do carregamento ao longo dele.
- c) A resposta do sistema é crítica, portanto, altamente sensível a pequenas variações dos coeficientes da molécula, em particular, os de maior valor absoluto.
- d) O Método das Diferenças Finitas parece ter uma maior sensibilidade às irregularidades do contorno, de uma maneira particular onde houver concentração das tensões. O Método dos Elementos Finitos parece não ter tanta sensibilidade, havendo até um certo abrandamento ou "amacramento" das tensões. Isto concorre para uma certa homogeneização dos resultados.
- e) O grande volume de cálculo exige a automatização, nem sempre possível na sua totalidade, devido às características do problema. Os programas foram desenvolvidos em um computador IBM-1130-8K da Universidade Federal de Santa Maria.
- f) O tratamento de placas com orifícios, descontinuidades, anisotropia, contornos irregulares, bem como, problemas de natureza dinâmica e de estabilidade elástica são tratados de uma maneira geral através dos Elementos Finitos.

### GRÁFICOS

- 6.1 - Representa as tensões  $\sigma_y$  para a Placa 1A, calculadas por diferenças finitas em coordenadas triangulares.
- 6.2 - Representa as tensões  $\sigma_x$  para a Placa 1A, calculadas por diferenças finitas em coordenadas triangulares.
- 6.3 - Representa as tensões  $\sigma_y$  para a Placa 1B, resultados obtidos por diferenças finitas em coordenadas triangulares e por Elementos Finitos.
- 6.4 - Representa as tensões  $\sigma_x$  para a Placa 1B, resultados obtidos por diferenças finitas em coordenadas triangulares e por Elementos Finitos.
- 6.5 - Representa as tensões  $\sigma_y$  para a Placa 2A, resultados obtidos por diferenças finitas em coordenadas oblíquas e por Elementos Finitos.
- 6.6 - Representa as tensões  $\sigma_x$  para a Placa 2A, resultados obtidos por diferenças finitas em coordenadas oblíquas e por Elementos Finitos.

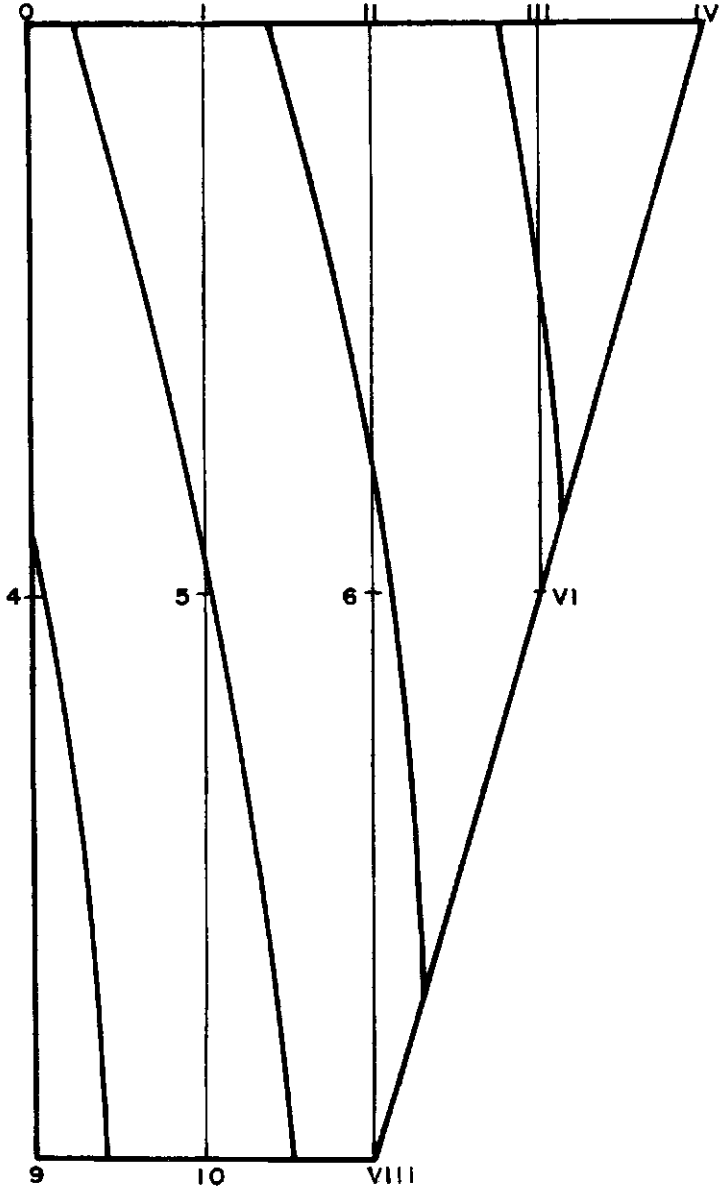
P L A C A I - A



G R Á F I C O 6.1

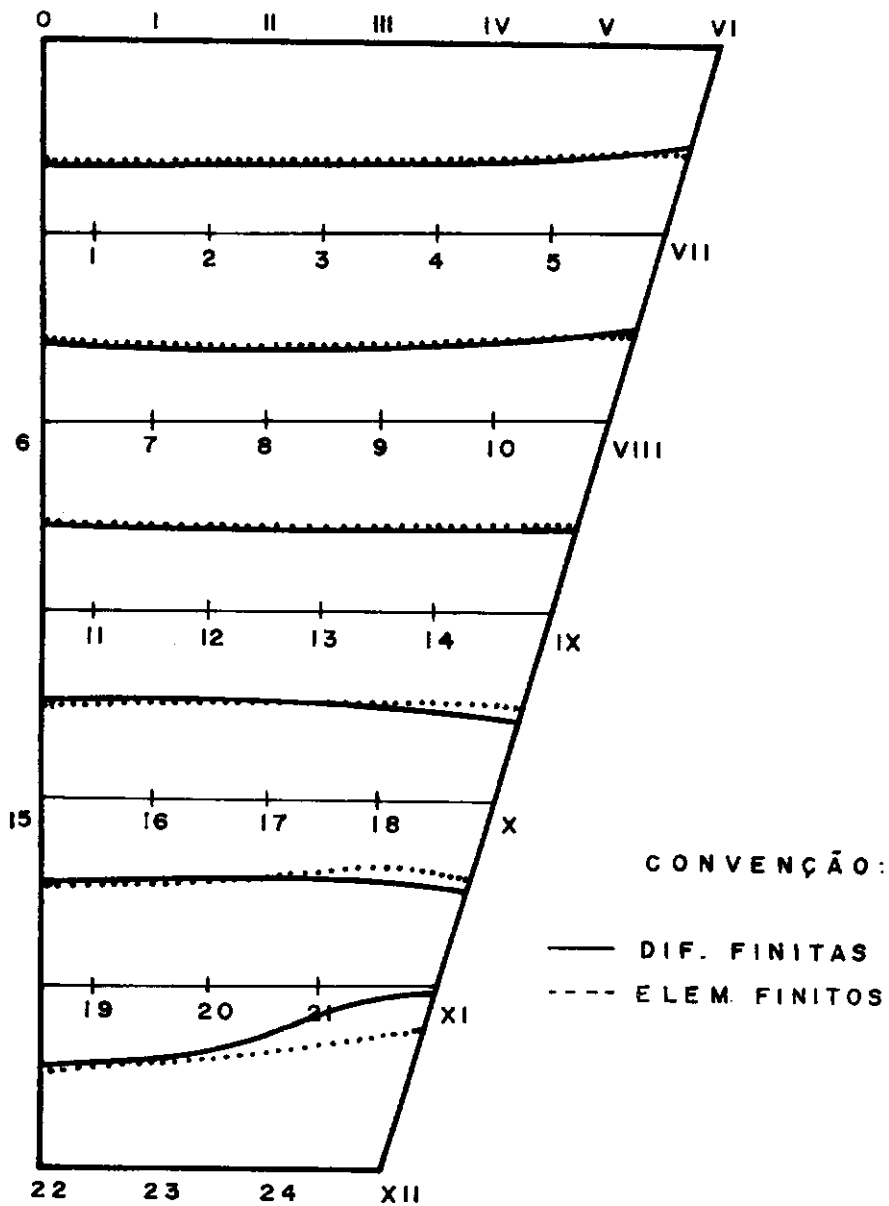


P L A C A I - A



G R Á F I C O 6 . 2

## P L A C A I - B



G R Á F I C O 6.3

## P L A C A I - B

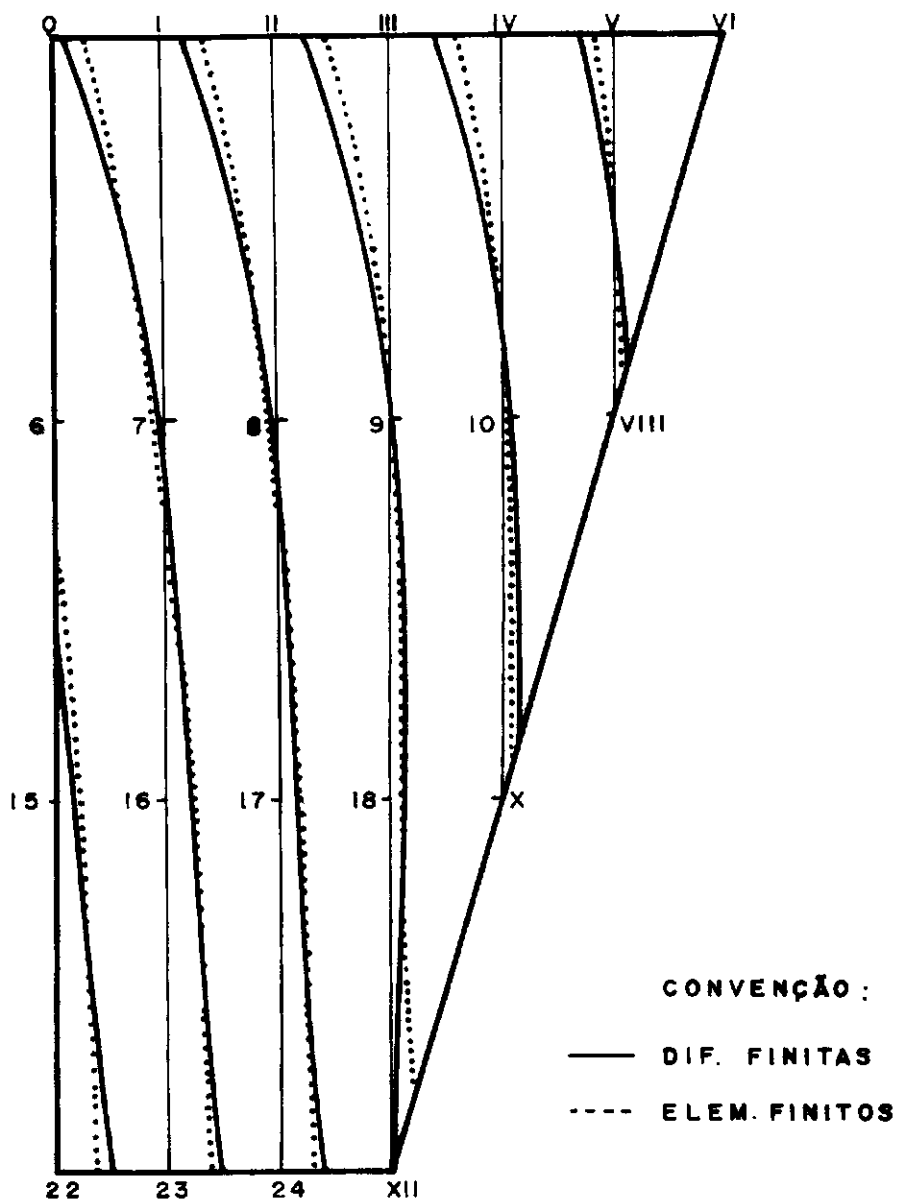
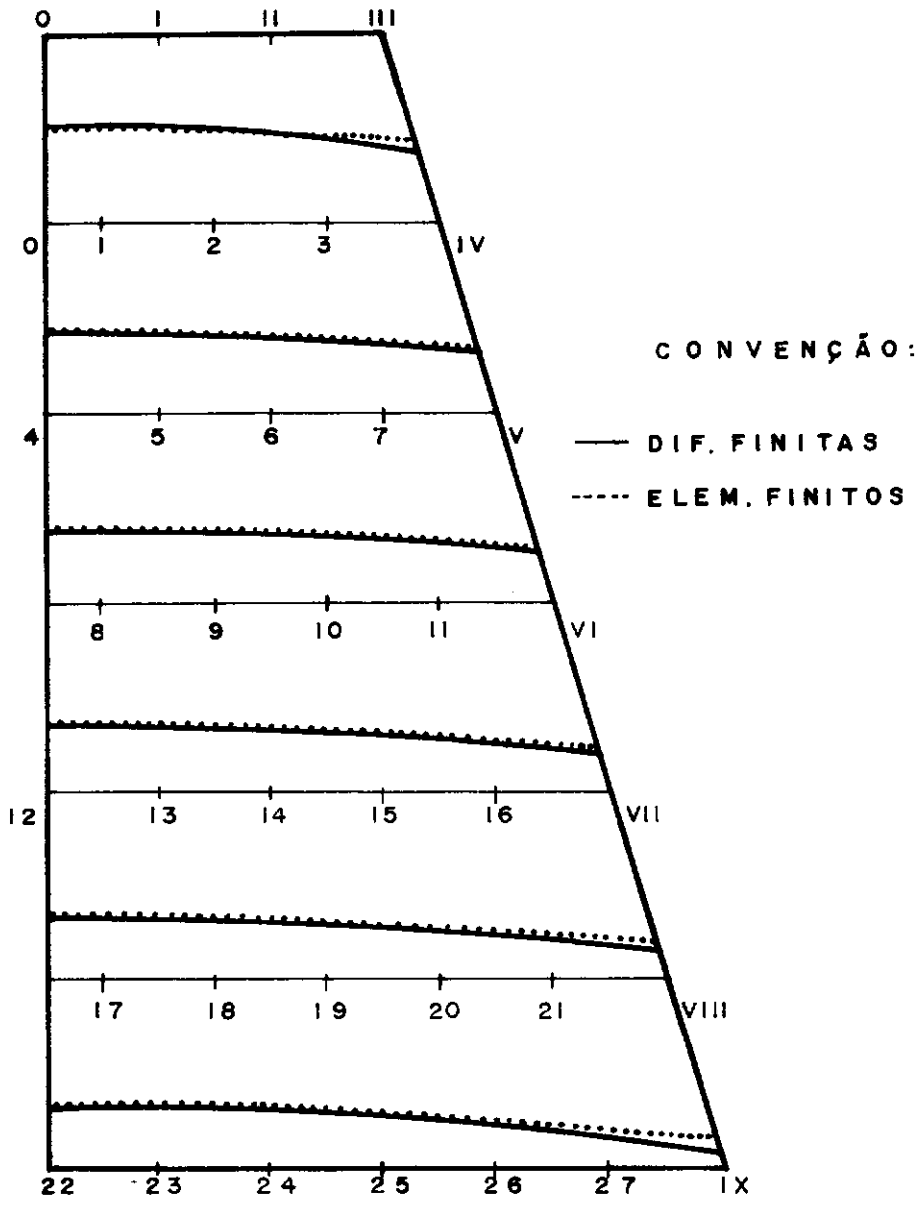


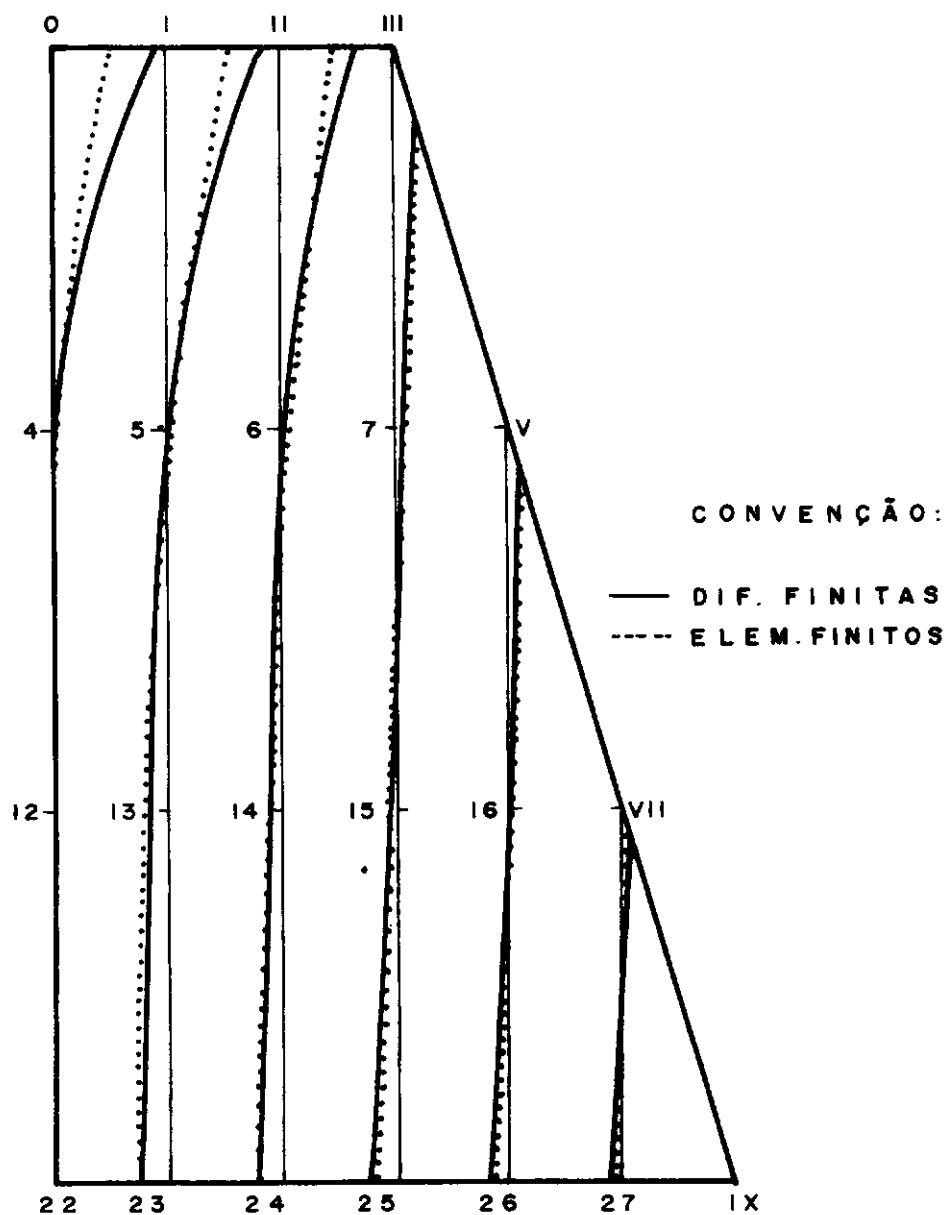
GRÁFICO 6.4

P L A C A 2 - A



G R Á F I C O 6.5

## P L A C A 2 - A



G R Á F I C O 6.6

## APÊNDICE 1

### Considerações Gerais

A razão central do uso do computador digital é o elevado número de equações através do Método das Diferenças Finitas. Não só a resolução das equações lineares, como as de mais etapas, são tôdas elas extremamente laboriosas e é necessário automatizá-las ao máximo.

A análise total compõe-se de 4 programas em "cascata", isto é, os dados para o seguinte já saem em cartões perfurados pelo anterior.

O primeiro programa, denominado GEMOL, gera os coeficientes da molécula específica, tanto para coordenadas triangulares como para coordenadas oblíquas.

O segundo programa, denominado de GERSI, gera o sistema de equações lineares, perfurando os coeficientes e termos conhecidos em cartões virgens, colocados no fim do programa, além de permitir a saída dos dados através da impressora.

O terceiro programa, denominado RSIMQ, calcula as raízes do sistema, que são os valores dos  $z$  internos, utilizando como dados os cartões perfurados pelo primeiro. Além disso, possibilita a saída dos valores da função nos pontos interiores, do contorno e exteriores em cartões perfurados e na impressora.

O quarto programa, denominado TEDIF, tomando como dados os cartões perfurados pelo RSIMQ, calcula as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  em cada ponto da malha do contorno, bem como as tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e o ângulo teta.

Êstes quatro programas são mais ou menos gerais, embora guardem uma acentuada conotação específica. Êste, aliás, é o maior empecilho para a automatização efetiva do método das Diferenças Finitas.

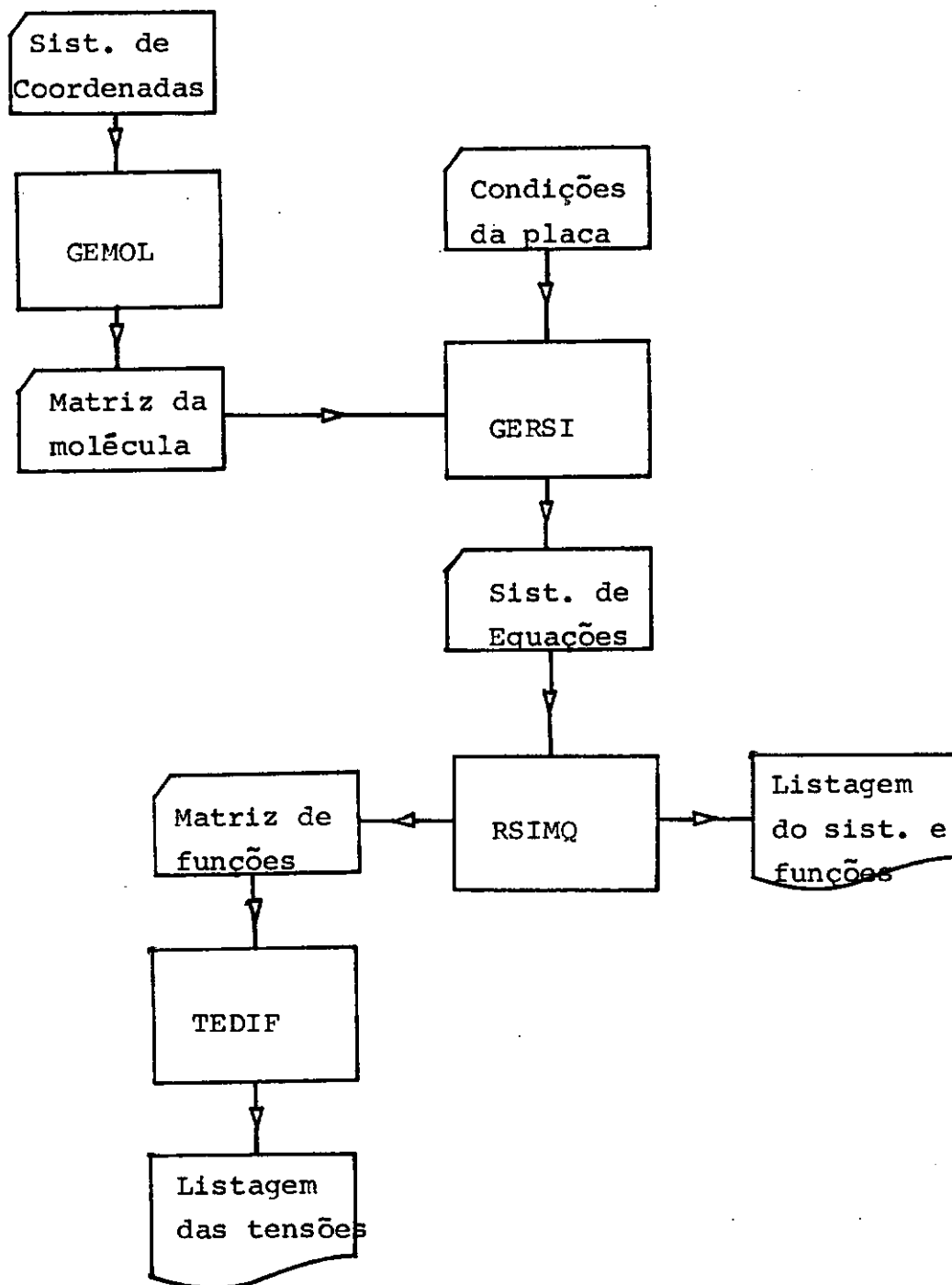
Face a inexistência, ou então, a divulgação limitadíssima de programas para o Método das Diferenças Finitas no que tange ao estudo de chapas, espera-se que o programa tenha validade, embora o autor reconheça suas limitações.

Deve-se frisar que o programa GERSI poderá ser usado, com adaptações, a outros problemas de elasticidade, de termodinâmica, de mecânica vibratória e outros, que envolvam resolução por Diferenças Finitas.

A seguir, apresenta-se um fluxograma simplificado dos programas com as devidas explicações.

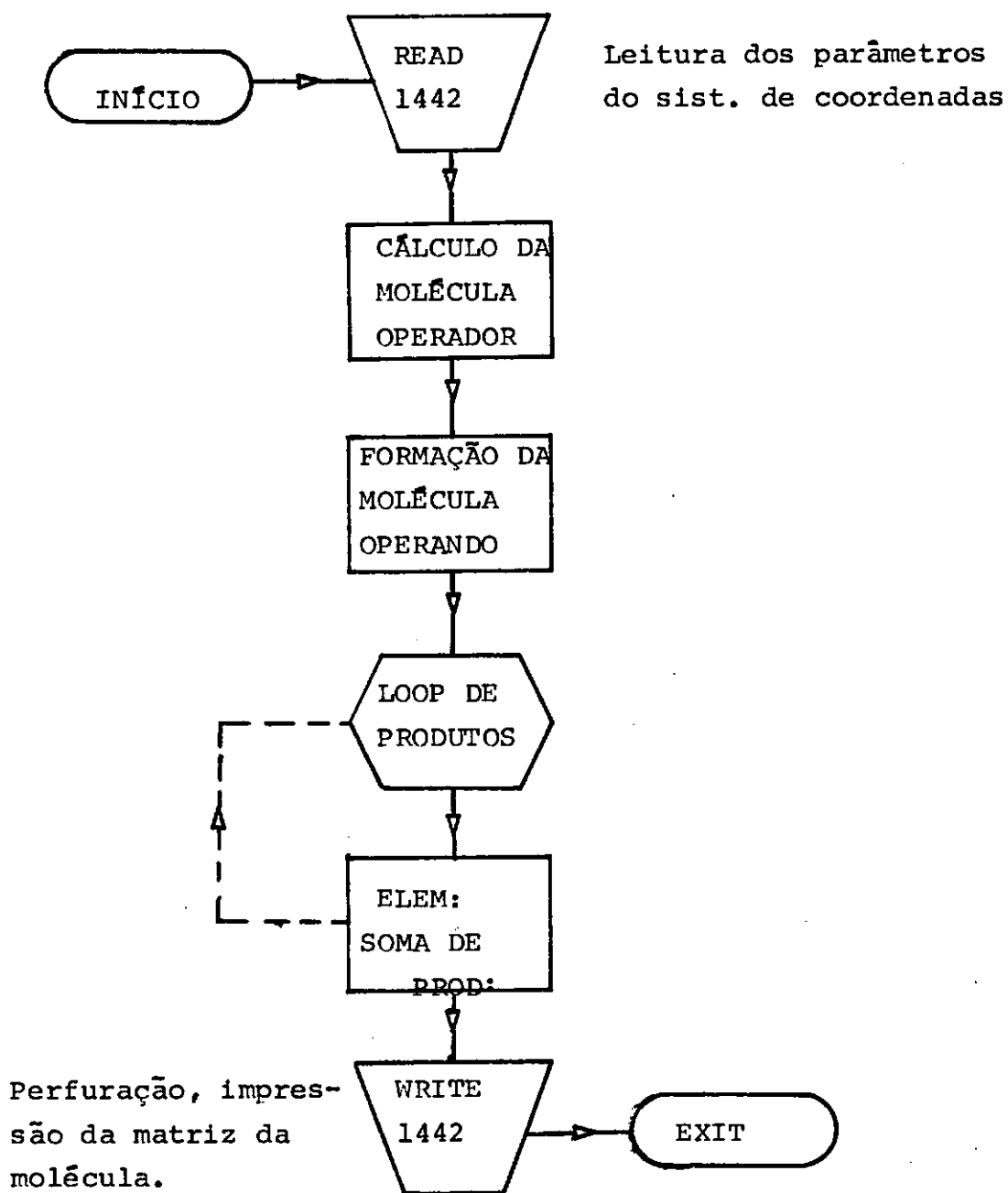
## DIAGRAMAS EM BLOCOS

## FLUXOGRAMA DE ENTRADA E SAIDA DO SISTEMA





## PROGRAMA GEMOL



```

*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
*EXTENDED PRECISION
C*****
C*****      TESE DE MESTRADO      *****
C*****      ENG. GILBERTO A. BENETTI      *****
C*****      GERADOR DE COEFICIENTES DA MOLECULA      *****
C*****
      DIMENSION XMAT(5,5),OPER1(3,3),OPER(7,7)
      DATA OPER / 49*0.0 /
      DIMENSION FIRST(20)
      READ(2,4)FIRST
4      FORMAT(20A2)
      READ(2,5)XK,XCOS
5      FORMAT(2F10.5)
      OPER(3,3)= XK*XCOS
      OPER(3,4)=2.
      OPER(3,5)= -XK*XCOS
      OPER(4,3)= 2.*XK*XK
      OPER(4,4)= -4.*(XK*XK + 1.)
      OPER(4,5)= 2.*XK*XK
      OPER(5,3)= -XK*XCOS
      OPER(5,4)= 2.
      OPER(5,5)= XK*XCOS
      DO 10 I=3,5
      DO 10 J=3,5
10      OPER1(I-2,J-2) = OPER(I,J)
      DO 40 I=1,5
      DO40 J=1,5
      XMAT(I,J) = 0.0
      DO 20 K=1,3
      DO 20 L=1,3
      M =I+K-1
      N=J+L-1
20      XMAT(I,J) = XMAT(I,J) + OPER1(K,L)*OPER(M,N)
40      XMAT(I,J) = XMAT(I,J)*4.
      WRITE(3,35)FIRST
35      FORMAT(1H1,20A2/)
      WRITE(3,30)((XMAT(I,J),J=1,5),I=1,5)
      WRITE(2,36)((XMAT(I,J),I=1,5),J=1,5)
30      FORMAT(1H0,5(/,1X,5F10.3))
36      FORMAT(///,(5F10.4)) .
      CALL EXIT
      END

```

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
*EXTENDED PRECISION
C*****
C*****      TESE DE MESTRADO      *****
C*****      ENG. GILBERTO A. BENETTI      *****
C*****      GERADOR DE COEFICIENTES DA MOLECULA      *****
C*****
      DIMENSION XMAT(5,5),OPER1(3,3),OPER(7,7)
      DATA OPER / 49*0.0 /
      DIMENSION FIRST(20)
      READ(2,4)FIRST
4      FORMAT(20A2)
      READ(2,5)F
5      FORMAT(2F10.5)
      OPER(3,3) = 2.
      OPER(3,4) = 2.
      OPER(4,3) = -F
      OPER(4,4) = 2.*F - 8.
      OPER(4,5) = -F
      OPER(5,4) = 2.
      OPER(5,5) = 2.
      DO 10 I=3,5
      DO 10 J=3,5
10      OPER1(I-2,J-2) = OPER(I,J)
      DO 40 I=1,5
      DO 40 J=1,5
      XMAT(I,J) = 0.0
      DO 20 K=1,3
      DO 20 L=1,3
      M = I+K-1
      N = J+L-1
20      XMAT(I,J) = XMAT(I,J) + OPER1(K,L)*OPER(M,N)
40      XMAT(I,J) = XMAT(I,J)/4.
      WRITE(3,35)FIRST
35      FORMAT(1H1,20A2/)
      WRITE(3,30)((XMAT(I,J),J=1,5),I=1,5)
      WRITE(2,36)((XMAT(I,J),I=1,5),J=1,5)
30      FORMAT(1H0,5(/,1X,5F10.3))
36      FORMAT(///,(5F10.4))
      CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
 EXTENDED PRECISION  
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
 COMMON            0   VARIABLES        338   PROGRAM        388

## GEMOL

## MOLECULAS GERADORAS ESPECÍFICAS

## COORDENADAS TRIANGULARES

Para um ângulo  $\alpha$ , tal que  $\operatorname{tg} \alpha = 3,333$

1.0000	2.0000	1.0000		
10.1111	-18.1111	-18.1111	10.1111	
25.5586	-140.6789	254.2406	-140.6789	25.5586
	10.1111	-18.1111	-18.1111	10.1111
		1.0000	2.0000	1.0000

Para um ângulo  $\alpha = 60^\circ$

1.0000	2.0000	1.0000		
2.0000	-10.0000	-10.0000	2.0000	
1.0000	-10.0000	42.0000	-10.0000	1.0000
	2.0000	-10.0000	-10.0000	2.0000
		1.0000	2.0000	1.0000

## COORDENADAS OBLÍQUAS

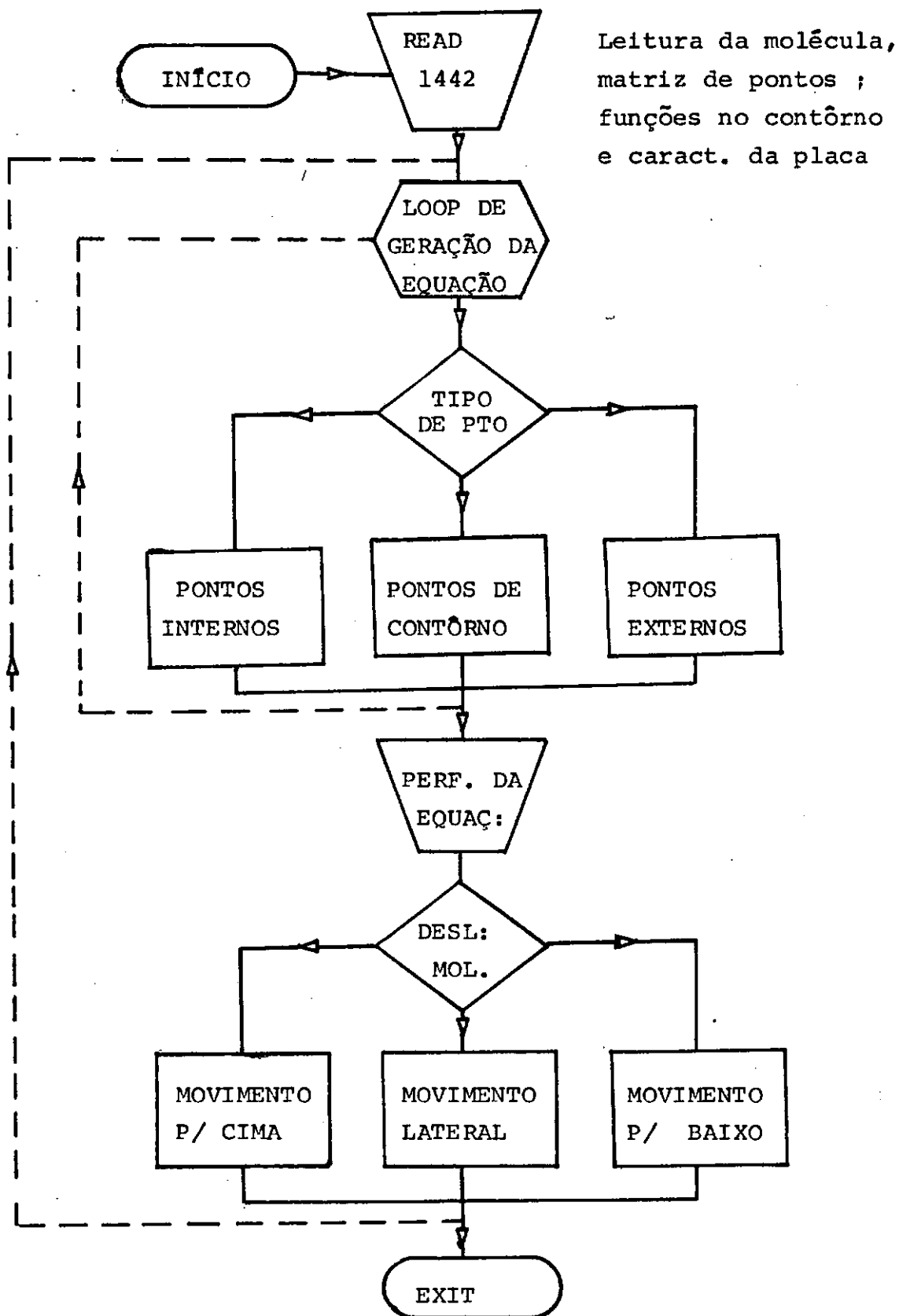
Para um ângulo  $\alpha$ , tal que  $\operatorname{tg} \alpha = -3,333$

1.0000	-8.0000	14.0000	8.0000	1.0000
-24.2210	161.3250	-257.7666	32.4400	24.2210
144.6610	-780.4133	1367.5030	-780.4133	144.6610
24.2210	32.4400	-257.7666	161.3250	-24.2210
1.0000	8.0000	14.0000	-8.0000	1.0000

Para um ângulo  $\alpha = 120^\circ$

1.0000	-8.0000	14.0000	8.0000	1.0000
-8.0000	64.0000	-128.0000	0.0000	8.0000
14.0000	-128.0000	324.0000	-128.0000	14.0000
8.0000	0.0000	-128.0000	64.0000	-8.0000
1.0000	8.0000	14.0000	-8.0000	1.0000

## PROGRAMA GERSI



```

*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C*****
C*****      TESE DE MESTRADO      *****
C*****      PROGRAMA DE GERACAO DE EQUACOES      *****
C*****
      REAL MOLEC
      DIMENSION FI(12,15,2),COEF(49),CONST(14)
      DIMENSION NROTA(48),KSKIP(6)
      DATA KX,JI,IN / 0,1,6 /
      JF = JI +4
      IE = IN +4
      WRITE(3,47)
47  FORMAT(1H1,70(' '))
      READ(2,400)NPONT,NCONS,NLAT,LAST,IBEXT,ITEXT
400  FORMAT(6I3)
      READ(2,401)CORTE,KSKIP
401  FORMAT(F10.5 ,6I3)
      READ(2,402)NROTA
402  FORMAT(50I1)
      NCOEF = NPONT + 1
      LATER = NPONT + NLAT
      READ(2,225)(CONST(L),L=1,NCONS)
225  FORMAT(8F10.4)
      READ(2,25)((FI(I,J,2),I=IN,IE),J=JI,JF)
25  FORMAT(5F10.4)
      READ(2,15)((FI(I,J,1),J=1,15),I=1,12)
15  FORMAT(15F4.0)
      WRITE(2,625)(CONST(L),L=1,NCONS)
625  FORMAT(//,(8F10.4))
C      ESCRITA DOS CAMPOS INCIDENTES
40  JF=JI+4
      IE=IN+4
      KX=KX+1
      DO 56 L=1,6
      IF(KX-KSKIP(L))56,35,56
56  CONTINUE
      DO 320 L =1,NCOEF
320  COEF( L)=0.0
      DO 60 I=IN,IE
      WRITE(3,37)((FI(I,J,K),K=1,2),J=JI,JF)
37  FORMAT('0'5(F4.0,F8.2,8X))
C      GERACAO DA EQUACAO NO PONTO
      DO 70 J=JI,JF
      H = 1.
      INDEX = IFIX(FI(I,J,1) + 0.5)
      MOLEC=FI(I,J,2)
      IF(INDEX - NCOEF) 150,121,121

```

PAGE 2 GEROB

```

121 IF(INDEX - LATER)170,170,160
150 COEF(INDEX)=COEF(INDEX)+MOLEC
GO TO 70
160 IF(INDEX-IBEXT)161,162,162
161 KONST = INDEX-LATER
COEF(NCOEF) = COEF(NCOEF) + CONST(KONST)*MOLEC
GO TO 70
162 IF(INDEX-ITEXT)163,164,164
163 KDESV = IFIX(FI(I,J-4,1)+0.5)
H = 2.
GO TO 171
164 KDESV = IFIX( FI(I,J-6,1)+0.5)
H = 3.
GO TO 171
170 KDESV = IFIX(FI(I,J-2,1)+0.5)
171 COEF(NCOEF) = COEF(NCOEF) + MOLEC*CORTE*H
COEF(KDESV)=COEF(KDESV)+MOLEC
70 CONTINUE
60 CONTINUE
WRITE(3,45)
45 FORMAT('0',40(' '))
COEF(NCOEF) =-COEF(NCOEF)
WRITE(3,235)(COEF(L),L=1,NCOEF)
235 FORMAT(/1X,10F10.3)
DO 80 LL=1,NCOEF
IF(COEF(LL))81,80,82
81 COEF(LL)=COEF(LL)-0.000501
GO TO 80
82 COEF(LL)=COEF(LL)+0.000501
80 CONTINUE
WRITE(2,237)(COEF(L),L=1,NCOEF)
237 FORMAT(8F10.3)
WRITE(3,46)
46 FORMAT(1X,70(' '))
WRITE(3,47)
35 K=2
C DESVIA PARA O PROXIMO DESLOCAMENIO
IF(KX-LAST)54,54,90
54 IF(NROTA(KX) -2)11,22,33
C MOVIMENTO PARA CIMA
11 DO 110 J=JI,JF
DO 110 I=IN,IE
110 FI(I-1,J,K)=FI(I,J,K)
IN=IN-1
GO TO 40
C MOVIMENTO LATERAL
22 DO 210 I=IN,IE

```

PAGE 3 GEROB

```

      DO 210 J=JI,JF
      JJ=JI+JF-J
210  FI(I,JJ+1,K)=FI(I,JJ,K)
      JI=JI+1
      GO TO 40
C          MOVIMENTO PARA BAIXO
33  DO 310 J=JI,JF
      DO 310 I=IN,IE
      II=IN+IE-I
310  FI(II+1,J,K)=FI(II,J,K)
      IN=IN+1
      GO TO 40
90  CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 EXTENDED PRECISION  
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
 COMMON 0 VARIABLES 1360 PROGRAM 934

END OF COMPILATION



## GERSI

cartões de dados

1º cartão

NPONT, NCONST, NLAT, NLAST, IBEXT, ITEXT

NPONT número de pontos internos da malha

NCONST número de valores constantes (pontos do contôrn<sub>o</sub> no e pontos externos que não forem funções dos internos).

NLAT número de pontos externos que correspondem ao contôrn<sub>o</sub> lateral, sômente aqueles que são funções dos internos.

NLAST número de movimentos da molécula.

IBEXT caracteriza o primeiro ponto bi-externo.

ITEXT caracteriza o primeiro ponto tri-externo.

Formato 400 do GERSI

2º cartão

CORTE, KSKIP

CORTE valor do esforço cortante, na direção vertical, no contôrn<sub>o</sub> inclinado.

KSKIP número de ordem dos pontos onde o programa deve saltar, considerando o caminhamento ótimo. Os pontos são renumerados para efeito de gerar as equações, esta renumeração não é efetuada , mas apenas idealizada.

Formato 401 do GERSI

3º cartão

NROTA

NROTA

movimentos da molécula

1 - desloca para cima

2 - desloca para a direita

3 - desloca para baixo

Formato 402 do GERSI

4º cartão

NCONST

NCONST

valor numérico dos pontos do contorno e de todos os pontos externos que não são funções dos pontos internos.

Formato 625 do GERSI

O número de cartões será dimensionado de acordo com o número de constantes.

Próximos cartões

Coeficientes  
da molécula

Número de cartões igual ao número de linhas da molécula.

Formato 25 do GERSI

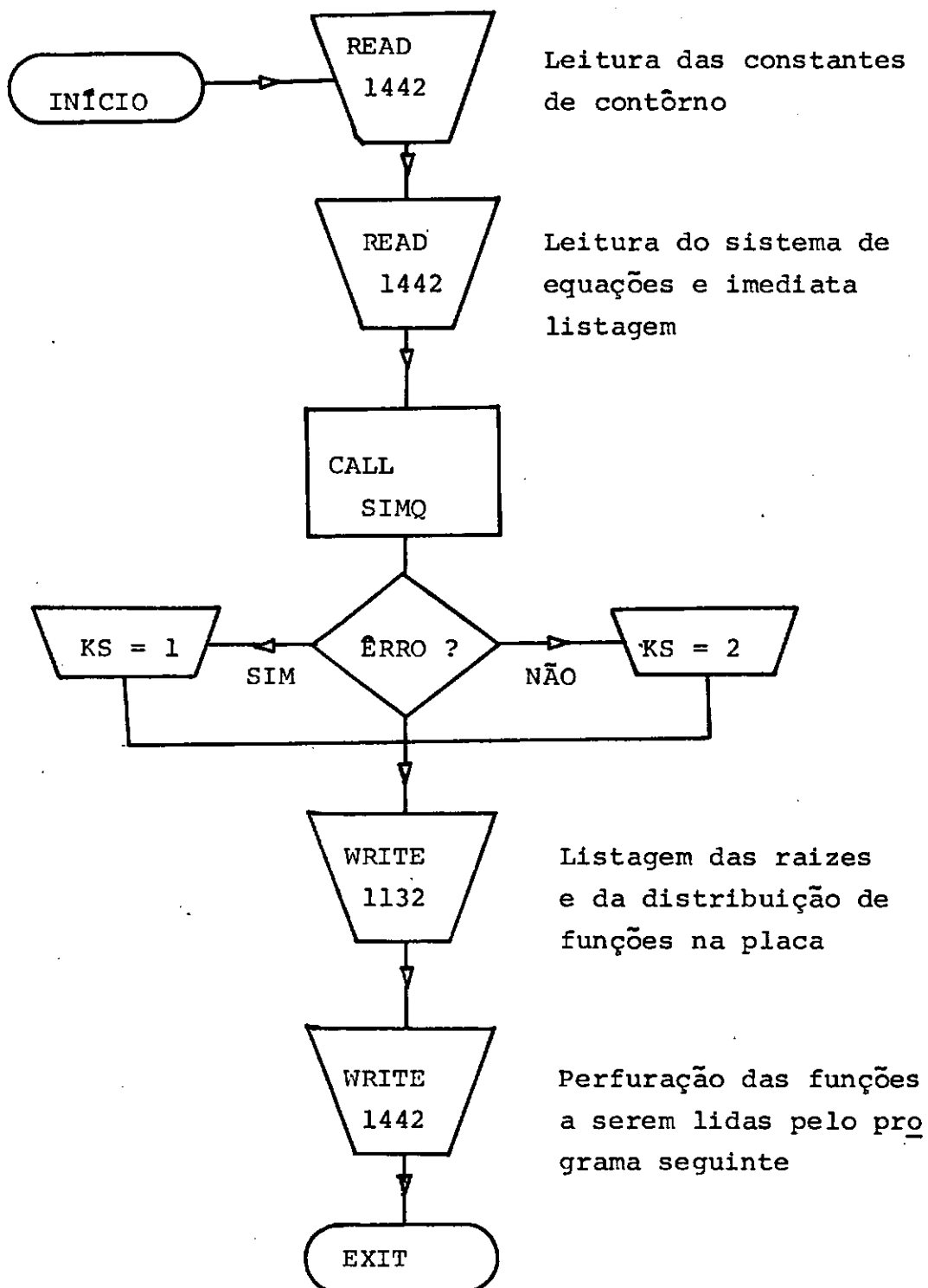
Cartões seguintes

Leitura dos pontos internos, do contorno, externos, se necessário, bi e tri-externos.

Cada cartão conterá uma linha da Placa aberta. Se ultrapassar a capacidade do cartão, deverá ser adotado outro formato.

Formato 15 do GERSI

## PROGRAMA RSIMQ



```

*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132PRINTER)
*IOCS(TYPEWRITER)
C*****
C*****      TESE DE MESTRADO      *****
C*****      ENG. GILBERTO BENETTI      *****
C*****      RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES      *****
C*****
      DIMENSION A(27,27),B(27),C(12),D(6)
      DATA E / 1.5 /
      READ(2,200)C
200  FORMAT(8F10.4)
      DO 222 I=1,27
222  READ(2,80)(A(I,J),J=1,27),B(I)
      80  FORMAT(8F10.4)
      WRITE(3,10)((A(I,J),J=1,27),I=1,27)
10  FORMAT(1H1///27X'MATRIZ DOS COEFICIENTES',/,(9F8.2))
30  FORMAT(1H0///27X,'RAIZES DO SISTEMA',/,(9F8.2))
      WRITE(3,20)(B(J),J=1,27)
20  FORMAT(1H0//27X'VETOR CONSTANTE'//,(9F8.2))
      CALL SIMQ(A,B,27,KS)
      WRITE(1,25) KS
25  FORMAT(/'KS ='I6)
      WRITE(3,30)(B(J),J=1,27)
      D(1)=B(3)-E
      D(2)=B(7)-E
      D(3)=B(11)-E
      D(4)=B(16)-E
      D(5)=B(21)-E
      D(6)=B(27)-E
      F=B(20)-E*2.
      READ(2,205)
205  FORMAT(/)
      WRITE(3,202)
202  FORMAT(///27X'FUNCOES NA PLACA')
201  FORMAT(10F8.4)
203  FORMAT(1H0,9F8.2)
      WRITE(2,201)B(2),B(1),(B(J),J=1,3),C(6),D(1)
      WRITE(3,203)B(2),B(1),(B(J),J=1,3),C(6),D(1)
      WRITE(2,201)C(2),(C(J),J=1,5),C(12)
      WRITE(3,203)C(2),(C(J),J=1,5),C(12)
      WRITE(2,201)B(2),B(1),(B(J),J=1,3),C(6),D(1)
      WRITE(3,203)B(2),B(1),(B(J),J=1,3),C(6),D(1)
      WRITE(2,201)B(5),(B(J),J=4,7),C(7),D(2)
      WRITE(3,203)B(5),(B(J),J=4,7),C(7),D(2)
      WRITE(2,201)B(9),B(8),(B(J),J=8,11),C(8),D(3)
      WRITE(3,203)B(9),B(8),(B(J),J=8,11),C(8),D(3)
      WRITE(2,201)B(13),(B(J),J=12,16),C(9),D(4)

```

PAGE 3 SIMQ P2

```

WRITE(3,203)B(13),(B(J),J=12,16),C(9),D(4)
WRITE(2,201)B(18),B(17),(B(J),J=17,21),C(10),D(5)
WRITE(3,203)B(18),B(17),(B(J),J=17,21),C(10),D(5)
WRITE(2,201)B(23),(B(J),J=22,27),C(11),D(6)
WRITE(3,203)B(23),(B(J),J=22,27),C(11),D(6)
WRITE(2,201)      B(17),(B(J),J=17,21),C(10),D(5),F
C PARA COORD. TRIANGULARES SUBSTITUA O CARTAO PELO COM COMENTARIO
C WRITE(2,201)B(18),B(17),(B(J),J=17,21),C(10),D(5),F
WRITE(3,203)      B(17),(B(J),J=17,21),C(10),D(5),F
CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 EXTENDED PRECISION  
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
 COMMON 0 VARIABLES 2346 PROGRAM 1020

END OF COMPILATION

118	0.0239	0.0000
125	0.0458	0.0000
131	0.0778	0.0000
137	0.0687	0.0000

## TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSÕES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
CARRICAMENTO NO. 1						
125	-0.12527	-0.96471	0.01946	1.32	-0.12482	-0.96516
126	-0.15038	-0.96698	0.03160	2.21	-0.14916	-0.96821
127	-0.15828	-0.96659	0.06470	4.54	-0.13313	-0.95174
128	-0.11464	-0.91244	0.10284	7.22	-0.10160	-0.92549
129	-0.08913	-0.83272	0.15897	11.57	-0.05657	-0.86528
130	-0.06244	-0.70568	0.18264	14.79	-0.01418	-0.75392
131	-0.21901	-0.79991	0.01839	1.34	-0.21858	-1.00035
132	-0.25747	-0.99622	0.02080	1.61	-0.25684	-0.99681
133	-0.23574	-0.97712	0.03681	2.83	-0.23397	-0.97894
134	-0.20020	-0.95139	0.06382	4.82	-0.19482	-0.95677
135	-0.15164	-0.91496	0.10764	7.88	-0.13812	-0.92987
136	-0.07837	-0.82496	0.15797	11.46	-0.04634	-0.85702
137	-0.33388	-1.02025	0.00969	0.80	-0.33375	-1.02039
138	-0.34759	-1.00797	0.00250	0.21	-0.34758	-1.00798
139	-0.32001	-0.99882	0.00957	0.80	-0.31987	-0.99896
140	-0.27522	-0.97835	0.03356	2.72	-0.27362	-0.97995
141	-0.21416	-0.94851	0.08322	6.38	-0.20484	-0.95782
142	-0.10845	-0.89966	0.11963	8.41	-0.09076	-0.91736

## RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO. 5

## DESLOCAMENTOS DOS NOS

NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3
CARRICAMENTO NO. 1											
96	0.0000000	-2.2377072		97	0.0769976	-2.2231016		98	0.1520238	-2.1783880	
99	0.2727807	-2.1049745		100	0.2871076	-2.0057312		101	0.3433522	-1.8851182	
102	0.3904490	-1.7468921		103	0.4269130	-1.6216427		104	0.0000000	-2.4950426	
105	0.0744372	-2.4787963		106	0.1477727	-2.4280008		107	0.2170592	-2.3441882	
108	0.2802533	-2.2307374		109	0.3351659	-2.0947329		110	0.4055090	-1.8514772	
111	0.0000000	-2.7629762		112	0.0700185	-2.7451764		113	0.1390896	-2.6881142	
114	0.2055627	-2.5931642		115	0.2676697	-2.4635586		116	0.3219391	-2.3052176	
117	0.3717010	-2.0994829									

## REAÇÕES NOS APOIOS

NO	RA1	RA2	RA3
----	-----	-----	-----

## CARRICAMENTO NO. 1

96	-0.0049	0.0000
104	0.0011	0.0000
111	0.0099	0.0000

## TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSÕES NORMAIS PRINCIPAIS.

Tabela 5.4

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
CARREGAMENTO NO. 1						
104	-0.00041	-0.83987	0.01917	1.30	0.00002	-0.84030
105	-0.00781	-0.84196	0.03824	2.61	-0.00606	-0.84371
106	-0.01111	-0.82325	0.07790	5.43	-0.00370	-0.83065
107	-0.01737	-0.79099	0.11547	8.31	-0.00050	-0.80786
108	-0.02642	-0.74692	0.14802	11.17	0.00231	-0.77616
109	-0.04015	-0.69244	0.17417	14.05	0.00343	-0.73603
110	-0.05013	-0.64587	0.18270	15.77	0.00069	-0.69750
111	-0.02579	-0.88129	0.02022	1.35	-0.02531	-0.88177
112	-0.03631	-0.88411	0.03942	2.65	-0.03449	-0.88594
113	-0.03626	-0.86407	0.08124	5.55	-0.02836	-0.87197
114	-0.03676	-0.82841	0.12211	8.57	-0.01855	-0.84683
115	-0.04020	-0.77531	0.15948	11.72	-0.00709	-0.80842
116	-0.05238	-0.70163	0.18796	15.03	-0.00189	-0.75212
117	-0.05981	-0.64771	0.18637	16.18	-0.00571	-0.70181
118	-0.06426	-0.72384	0.02027	1.35	-0.06378	-0.92432
119	-0.08058	-0.92719	0.03755	2.53	-0.07892	-0.92885
120	-0.07555	-0.70653	0.07816	5.32	-0.06826	-0.91382
121	-0.06727	-0.86967	0.12021	8.34	-0.04964	-0.88730
122	-0.06000	-0.81296	0.16330	11.72	-0.02611	-0.84685
123	-0.05937	-0.73273	0.19129	14.80	-0.00882	-0.78328
124	-0.05911	-0.67998	0.18623	15.48	-0.00753	-0.73156

RESULTADOS PARA SUPERESTRUTURA NO. 4 \*\*\*\*\*

DESLOCAMENTOS DOS NOS

NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3	NO	D1	D2	D3
CARREGAMENTO NO. 1											
71	0.0000000	-1.5144995		72	0.0802751	-1.5048478		73	0.1584552	-1.4762186	
74	0.2325708	-1.4291593		75	0.3006782	-1.3645766		76	0.3613071	-1.2835013	
77	0.4134237	-1.1865511		78	0.4542243	-1.0714399		79	0.4828552	-0.9679934	
80	0.0000000	-1.7447440		81	0.0791787	-1.7334927		82	0.1562417	-1.6999366	
83	0.2290056	-1.6449034		84	0.2955151	-1.5698587		85	0.3542458	-1.4767270	
86	0.4044786	-1.3679155		87	0.4650590	-1.1762663		88	0.0000000	-1.9826617	
89	0.0782377	-1.9697722		90	0.1543928	-1.9309322		91	0.2262025	-1.8672691	
92	0.2916568	-1.7809085		93	0.3492874	-1.6748105		94	0.3981625	-1.5514027	
95	0.4447123	-1.3905223									

REAÇÕES NOS APOIOS

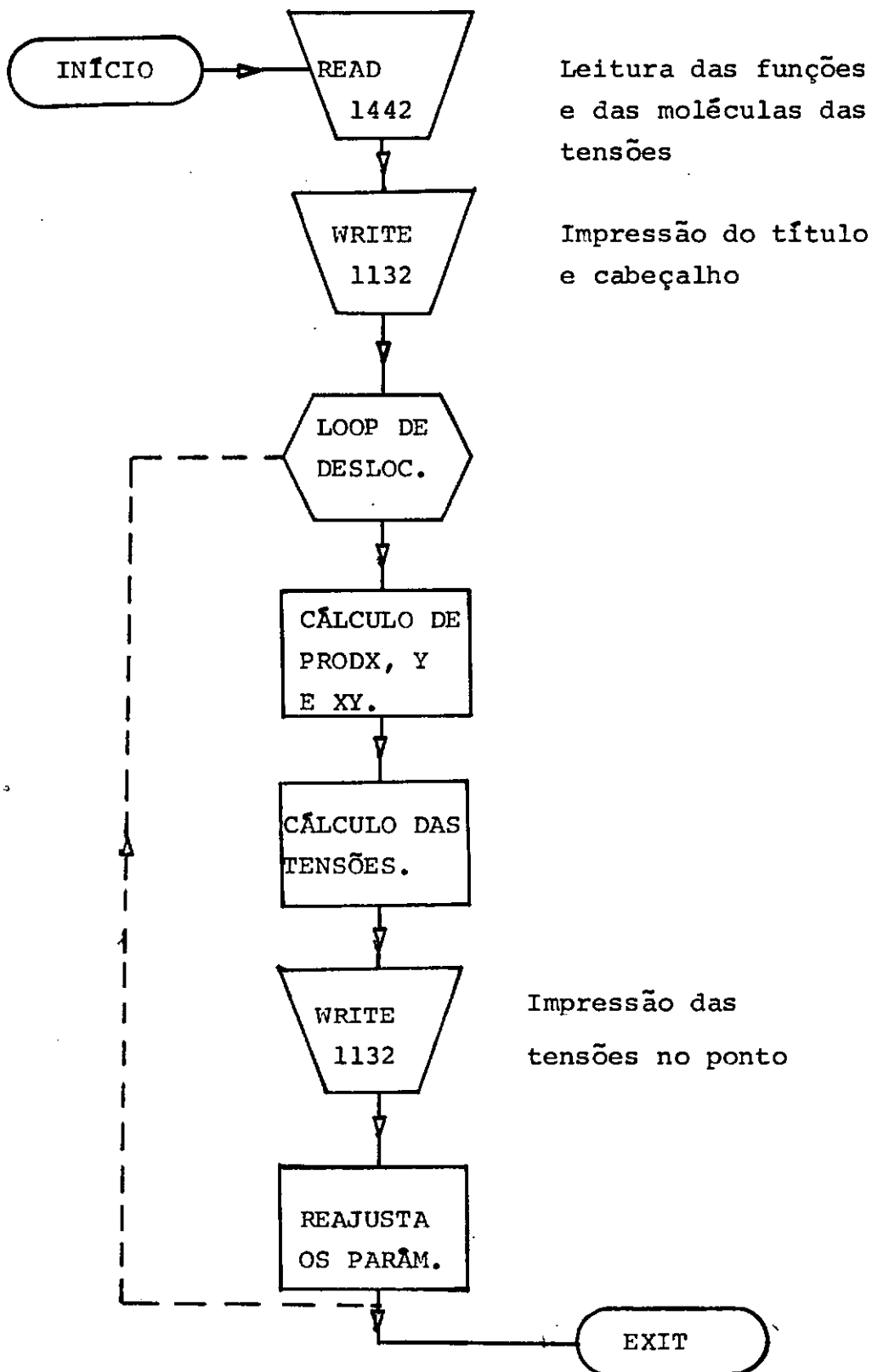
NO	RA1	RA2	RA3
CARREGAMENTO NO. 1			
71	-0.0168	0.0000	
80	-0.0133	0.0000	
88	-0.0096	0.0000	

TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSOES NORMAIS PRINCIPAIS.

NO	SIGXX	SIGYY	SIGXY	ALFA	SIG1	SIG2
----	-------	-------	-------	------	------	------

Tabela 5.4

## PROGRAMA TEDIF





```

*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C*****
C*****      TESE DE MESTRADO      *****
C*****      ENG. GILBERTO BENETTI      *****
C*****      CALCULO DAS TENSOES      *****
C*****
      DIMENSION FI(11,15),POINT(10,15),PRODX(9),PRODY(9),PRODT(9)
      DIMENSION OPERX(9),OPERY(9),OPERT(9)
      DIMENSION SOMA(3)
      DATA M,JI,JBERG,JEND,JF / '1',5,4,9,8 /
95  FORMAT(1X,'-----',6('I-----'))
      READ(2,45)OPERX,OPERY,OPERT
45  FORMAT(3F10.3)
      READ(2,85)((POINT(I,J),J=1,15),I=2,8)
85  FORMAT(15A4)
      DO 20 I=1,7,2
      DO 30 K=1,2
      II = I+K-1
30  READ(2,25)(FI(II,J),J=JBERG,JEND)
25  FORMAT(10F8.4)
20  JBERG = JBERG - 1
      READ(2,25)(FI( 9,J),J=1,9)
      WRITE(3,54)
54  FORMAT(1H1,/,/,1X, ' PLACA COM 27 PONTOS - COORD. OBLIQUAS ')
      WRITE(3,55)
55  FORMAT(1H0'PONTO'6X'SIGX'6X'SIGY'5X'SIGXY'6X'SIG1'6X'SIG2'6X'AL
      WRITE(3,95)
      DO 70 I=2,8
      DO 80 J=JI,JF
      KI = I-1
      KF=I+1
      LI=J-1
      LF=J+1
      N=0
      DO 91 K=KI,KF
      DO 91 L=LI,LF
      N=N+1
      PRODX(N) = FI(K,L)*OPERX(N)
      PRODY(N)= FI(K,L)*OPERY(N)
91  PRODT(N) = FI(K,L)*OPERT(N)
      DO 40 L=1,3
40  SOMA(L)= 0.
C
      DO 50 N=1,9
      SOMA(1) = SOMA(1) + PRODX(N)
      SOMA(2) = SOMA(2) + PRODY(N)

```

PAGE 2

```

50 SOMA(3) = SOMA(3) + PRODT(N)
C
  SOMA(1)=0.36*SOMA(1)
  SOMA(2)=4.00*SOMA(2)
  SOMA(3)=-0.6000*SOMA(3)
  SUB = SOMA(1) - SOMA(2)
  ALPHA = (ATAN(2.*SOMA(3)/SUB))/2.
  ALPHA = ALPHA*180./3.1415932
  P1= (SOMA(1) + SOMA(2))/2.
  P2 =(SQRT(SUB**2 + 4.*SOMA(3)**2))/2.
  SIG1= P1 + P2
  SIG2= P1 - P2
  WRITE(3,65)POINT(I,J),(M,SOMA(L),L=1,3),M,SIG1,M,SIG2,M,ALPHA
65  FORMAT(2X,A4,6(1X,A1,F8.2))
  WRITE(3,95)
80  CONTINUE
  IF(I-(I/2)*2)76,70,76
76  JI = JI -1
70  CONTINUE
  CALL EXIT
  END

```

FEATURES SUPPORTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 EXTENDED PRECISION  
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
 COMMON          0   VARIABLES    1162   PROGRAM    672

END OF COMPILATION

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) Borodich, M.F.: 'Theory of Elasticity', Peace Publishers ,  
Moscow, 1963.
- 2) Girkmann, K.: 'Flächentragwerke', Springer Verlag, Wien,  
1963.
- 3) Beyer, K.: 'Estatica del Hormigon Armado', Tomo II, Libre -  
ria y Editorial Nigar, SRL, Buenos Aires, 1959.
- 4) Timoshenko, S. and Goodier, J.N.: 'Theory of Elasticity' ,  
2nd ed., McGraw-Hill, 1951..
- 5) Sokolnikoff, I.S.: 'Mathematical Theory of Elasticity',  
McGraw-Hill Book Company, INC., 2nd ed., 1956.
- 6) Salvadori, M.G. and Baron, M.L.: 'Numerical Methods in  
Engineering', 2nd ed., Prentice-Hall.
- 7) Wang, P.C.: 'Numerical and Matrix Methods in Structural  
Mechanics', John Wiley & Sons, INC., 1966.
- 8) Santos, Sydney M.G.: Curso Seriado sôbre Teoria das Placas  
publicado na revista Estrutura - volumes diver  
sos.
- 9) Vasconcellos, F., A.: O Método dos Elementos Finitos: Funda-  
mentos Teóricos - Automatização - Aplicações a  
Problemas de Placas e de Elasticidade Plana,  
Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janei  
ro, 1970.

- 10) Marcus, H.: 'Die Theorie Elastischer Gewebe und Ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten' Verlag von Julius Springer, 1932.
- 11) Timoshenko, S. and Woinowsky - Krieger, S.: 'Theory of Plates and Shells', McGraw-Hill, 2nd ed., 1959.
- 12) Stüssi, F. und Dubas, P.: 'Numerische Methoden der Bau-  
statik', und 'Calcul Numérique des Plaques et des Parois Minces', Schweizerische Bauzeitung, voll. 79, Zurich, 1961.
- 13) Ponce, A.: 'Resolucion Aproximada de Equaciones en Derivadas Parciales', Revista de Ingenieria, vol.607, Montevideo, 1958.
- 14) Massarani, G.: 'Introdução ao Cálculo Numérico', Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1967.
- 15) Pacitti, Tércio: 'Fortran-Monitor, Princípios', Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1968.
- 16) Churchill, R.V.: 'Complex Variables and Applications', McGraw-Hill Company, INC., Tokyo, 1960.